

# Skrovkonstruktion, Beräkningsexempel

## Innehåll:

### Balkmetoder - Allmänt

Effektiv Fläns:

B2.1

B2.2

Balksystem/ Matrismetod

B2.3

B2.4

Dimensioneringsberäkningar

B2.5

B2.6

B2.7

### Balkmetoder - Idealisering

Idealisering:

B2.8

B2.9

Plasticering:

B2.10

### Balkmetoder - Torsion

B2.11

B2.12

B2.13

### FEM

B3.1

B3.2

### Buckling

B4.1

B4.2

### Utmattning

B5.1

### Probabilistisk dimensionering

B6.1

## Uppgifter    Lösningar

2.1.1

2.1.1

2.1.2

2.1.2

2.1.3-4

2.1.3-4

2.1.3-4

2.2.1

2.2.1-2

2.2.2

2.3.1

2.3.1

2.3.2-3

3.1.1

3.1.1

4.1.1

4.1.1

5.1.1

6.1.1

2.1.5

2.1.6

2.1.7-8

2.1.9-13

2.1.14-15

2.1.15

2.1.15-16

2.2.3-4

2.2.5-6

2.2.7-8

2.3.4-7

2.3.8-9

2.3.10-17

3.1.2-3

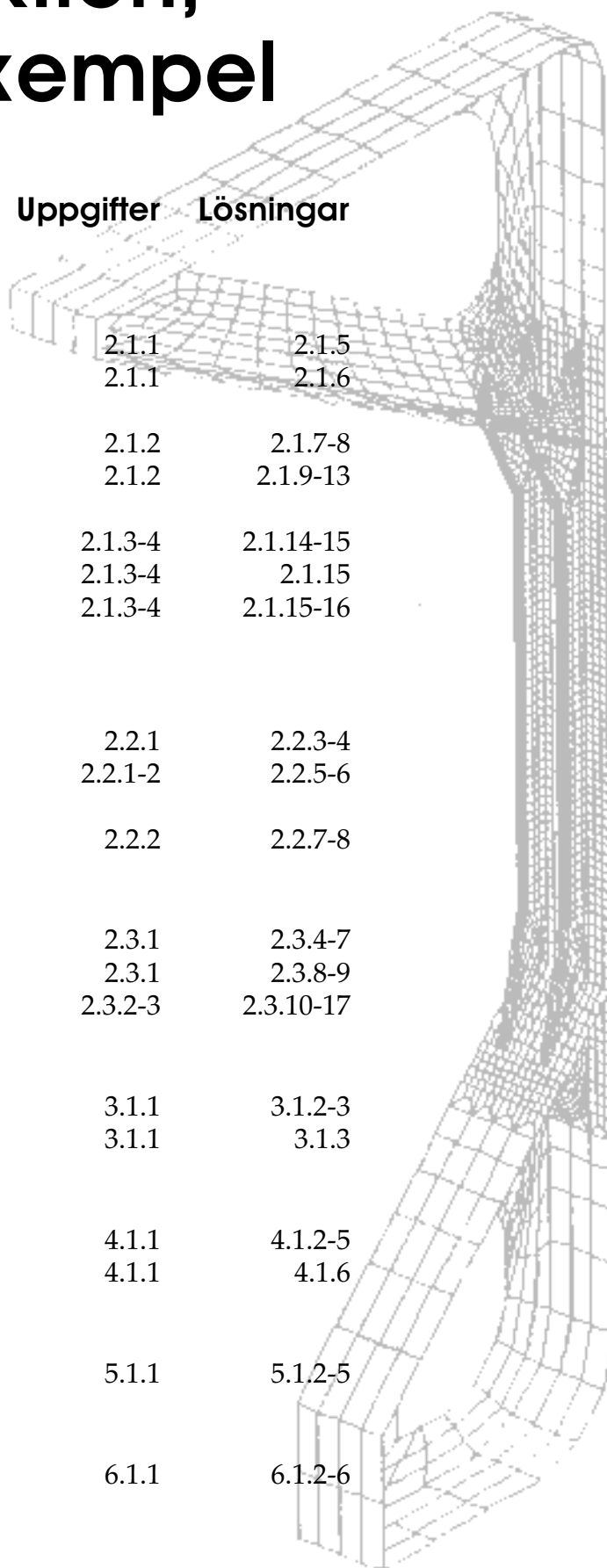
3.1.3

4.1.2-5

4.1.6

5.1.2-5

6.1.2-6



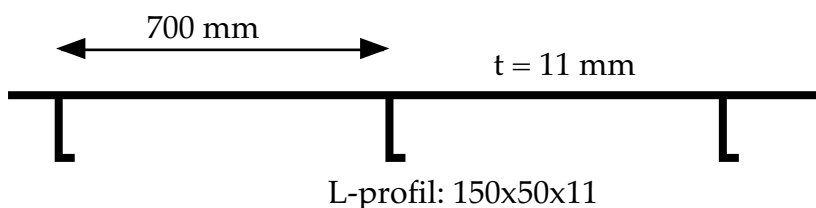
## Balkmetoder - Allmänt; Uppgifter

### Effektiv fläns:

#### B2.1

Undersök hur betydelsefull den effektiva plåtflänsen egentligen är för spänningsfördelningen i en förstyvning på en panel.

Antag som exempel följande dimensioner:



Hur förändras minsta böjmotstånd (och därmed max-böjspänning) om plåtflänsen är 110%, 80%, 50%, 20%. (Antag profilens fläns 100% effektiv hela tiden)  
(Programmera lämpligen beräkningen av böjmotstånd i ett kalkylprogram så att Du lätt kan ändra dimensioner på livplåt och flänsar. Det kommer Du att ha användning för i många uppgifter)

#### B2.2

Hur effektivt är egentligen fartygsdäcket som fläns till hela skrovbalken?

Utgå från dimensionerna enligt figur här intill

Antag att fartyget är 200 m långt och att vertikala böjmomentet fördelar sig som en harmoniskt halvsinusvåg längs hela skrovets längd  $M(x) = M_1 \cdot \sin(\frac{\pi x}{L})$  hur effektivt blir däcket då?

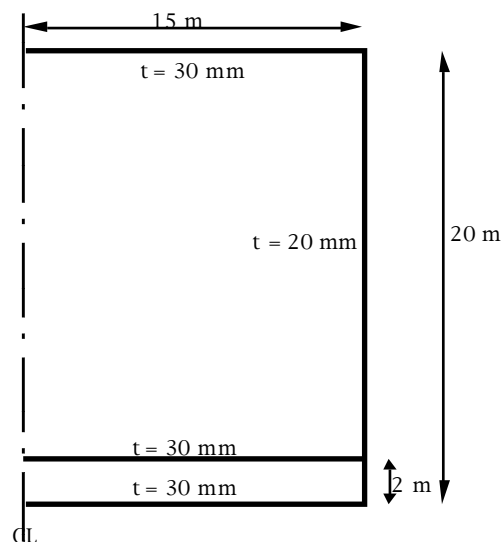
Antag istället att momentfördelningen kan beskrivas av en summa av två överlagrade harmoniska moment:

$$M(x) = \frac{3}{4} M_1 \cdot \sin(\frac{\pi x}{L}) + \frac{1}{4} M_1 \cdot \sin(\frac{3\pi x}{L})$$

Skissa momentfördelningen

Skissa relativa effektivitetens fördelning

Uppskatta lägsta effektivitet till position och belopp



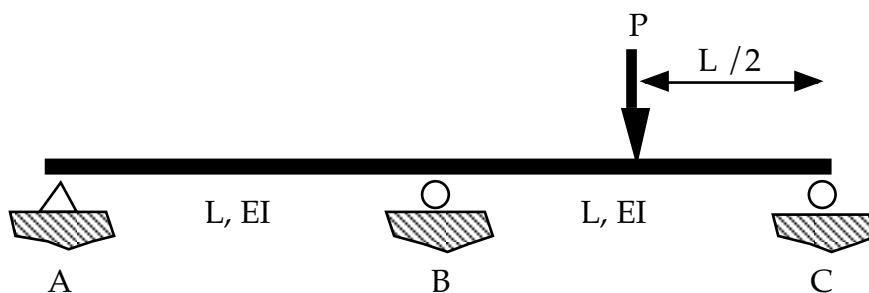
Balksystem / Matrismetod:

Antag slanka balkar med längd  $L$ , böjstyvhets  $EI$

B2.3

Bestäm med hjälp av systematiskt genomförd kraftmetod (och lämpliga elementarfall):

- a) Utböjningsvinkeln i punkten C
- b) Maximalt böjmoment i balksystemet

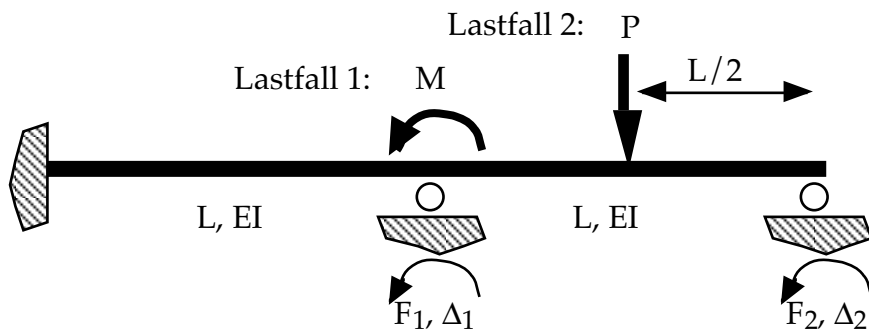


B2.4

- a) ställ upp styvhetsmatrisen för 2-balk-systemet nedan (endast 2 frihetsgrader!)
- b) lös ut förskjutningen  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  som funktion av de generella nodlasterna  $F_1$ ,  $F_2$ .
- c) lös ut förskjutningen som funktion av de "verkliga" lasterna  $M$  resp.  $P$ .
- d) Rita upp momentfördelningen vid de bägge lastfallen

Använd elemetstyvhetsmatrisen sid FA 2.4.14 samt skapa systemstyvhetsmatrisen med den metod som beskrivs på sid FA 2.4.4.

(Jämför resultatet för lastfall 2 med uppgiften B2.3 b) ovan)



### Dimensioneringsberäkningar

Uppgiften kommer att handla om dimensioneringen av däcksbalkarna i ett RoRo-fartyg. Ett utkast till skrovstrukturen visas i bifogade figur på följande sida.

Konstruktionen är gjord med bärande däcksbalkar i tvärskeppsled på inbördes avstånd 1.8 m. Vid varannan däcksbalk finns en vevbram/bottenstock (delning 3.6 m).

Mellan varje däcksbalk finns i sidobordläggningen ett extra 'sekundärt' vertikalt sidospant (delning 0.9 m). Däcken är förstyvade med longitudinaler med 0.6 m delning.

Design-lastfallet för däcken är ett jämt utbrett tryck på 3 ton/m<sup>2</sup> för mellandäcken och 2 ton/m<sup>2</sup> på väderdäcket.

Hela stålstrukturen är byggd i "mild steel" med följande materialdata:

$$\sigma_y = 235 \text{ MPa}, E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \nu = 0.3$$

#### B2.5

Kontrollera maximala böjspänningar i mellandäcksbalkarna under designtrycket 3 ton/m<sup>2</sup>. Du får här anta 100% medverkande flänsar till däcksbalkarna samt fast inspänning i innerbordläggningen.

Lösningen bör innefatta:

Beräkningsmodell, Momentfördelning,

Uppskattning av effektivt medverkande plåtfläns, böjmotstånd och maxspänning till belopp och position vid högst belastade punkten, samt någon form av värdering av om spänningen är OK.

#### B2.6

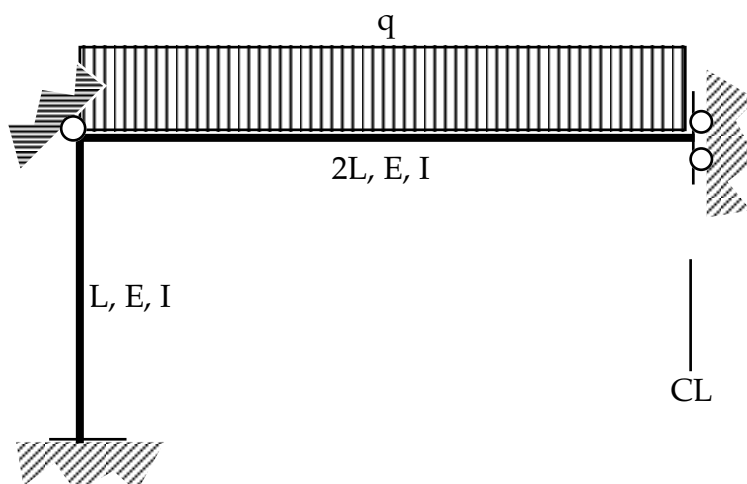
Uppskatta effektivt medverkande plåtfläns till longitudinalerna mitt emellan däcksbalkarna

- jämnt utbrett däckstryck
- punktlast mitt på longitudinalen (trailerhjul)

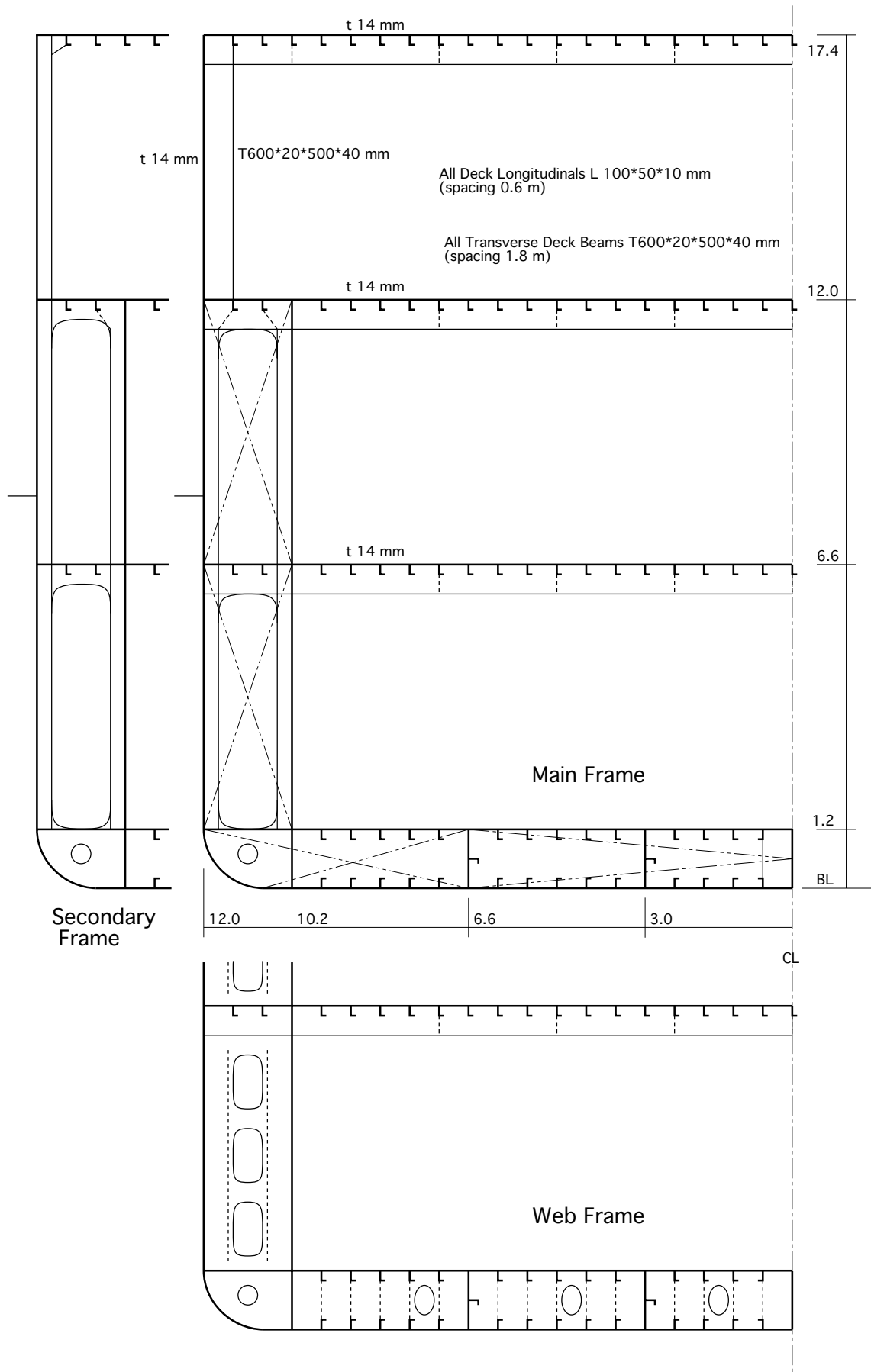
#### B2.7

En enkel ramverksmodell av väderdäcket skulle kunna se ut som följer:

- Försök förklara/motivera alla randvillkor, skissa momentfördelningen
- Beräkna nedböjningen av däcksbalken i CL uttryckt i  $q, L, E, I$
- Uppskatta nedböjningen i verkliga tal för designdäckslasten



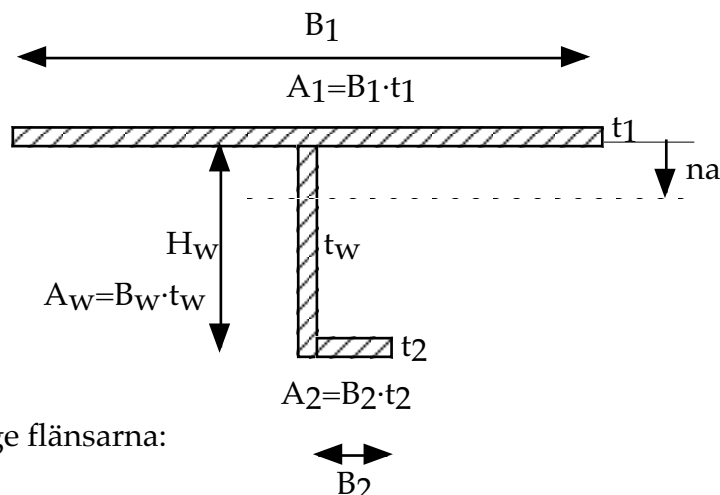
Figurbilaga till uppgifterna B2.5-7



## Balkmetoder - Allmänt; Förslag till lösningar

B2.1:

Antag generella dimensioner  
och beteckningar enligt fig:



Vi får då följande generella uttryck  
för neutralaxelns position, tröghetsmoment  
och böjmotstånd i (medellinjen av) de bågge flänsarna:

$$na(B_1, t_1, H_w, t_w, B_2, t_2) := \frac{\left[ B_1 \cdot t_1 \cdot \left[ \frac{-t_1}{2} \right] + H_w \cdot t_w \cdot \frac{H_w}{2} + B_2 \cdot t_2 \cdot \left[ H_w - \frac{t_2}{2} \right] \right]}{B_1 \cdot t_1 + H_w \cdot t_w + B_2 \cdot t_2}$$

$$I(B_1, t_1, H_w, t_w, B_2, t_2) := \left[ B_1 \cdot t_1 \cdot \left[ \frac{-t_1}{2} \right]^2 + \frac{t_1^3 \cdot B_1}{12} + H_w \cdot t_w \cdot \left[ \frac{H_w}{2} \right]^2 + \frac{H_w^3 \cdot t_w}{12} + B_2 \cdot t_2 \cdot \left[ H_w - \frac{t_2}{2} \right]^2 + \frac{t_2^3 \cdot B_2}{12} \right] \dots \\ + - \left[ (B_1 \cdot t_1 + H_w \cdot t_w + B_2 \cdot t_2) \cdot na(B_1, t_1, H_w, t_w, B_2, t_2)^2 \right]$$

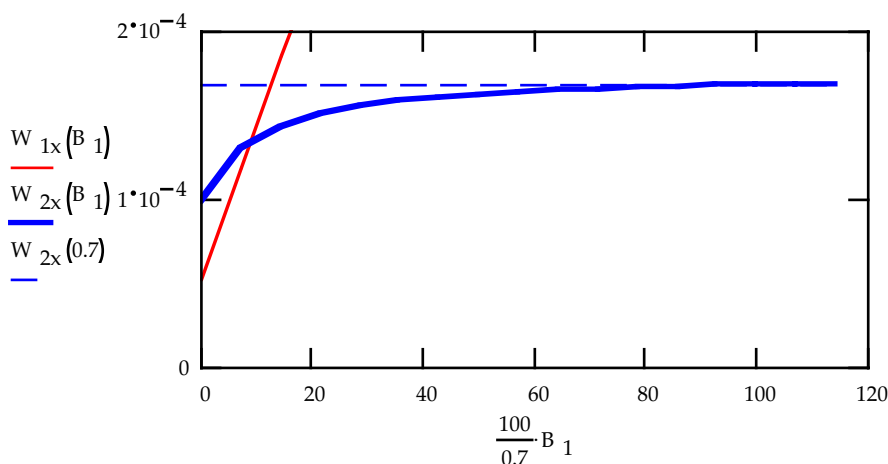
$$W_1(B_1, t_1, H_w, t_w, B_2, t_2) := \frac{I(B_1, t_1, H_w, t_w, B_2, t_2)}{na(B_1, t_1, H_w, t_w, B_2, t_2) + \frac{t_1}{2}}$$

$$W_2(B_1, t_1, H_w, t_w, B_2, t_2) := \frac{I(B_1, t_1, H_w, t_w, B_2, t_2)}{H_w - \frac{t_2}{2} - na(B_1, t_1, H_w, t_w, B_2, t_2)}$$

Vi kan nu enkelt plotta ett diagram som visar minsta böjmotstånd som funktion av relativa effektiviteten i plåten. Slutsats: minsta böjmotstånd påverkas knappast av om effektiviteten är 50% eller 110%! (men det börjar sjunka vid 20% och vid 7% övergår det från profilflänsen till plåten i detta fall)

$$B_1 := 0, 0.05 \dots 0.8 \quad t_1 := 0.011 \quad H_w := 0.15 \quad t_w := 0.011 \quad B_2 := 0.05 \quad t_2 := 0.011$$

$$W_{1x}(B_1) := W_1(B_1, t_1, H_w, t_w, B_2, t_2) \quad W_{2x}(B_1) := W_2(B_1, t_1, H_w, t_w, B_2, t_2)$$



B2.2:

Vid harmoniska momentfördelningar  $M(x)$  blir effektiviteten konstant och oberoende av momentets belopp. Fartygsdäcket motsvarar i sämsta fall randvillkoren för typfall II (box). Effektiviteten i däcket kan vi få ur Diagram I-IIIa (Fall II är det med punkterna):

För en halvsinusfunktion har vi  $B/L = 30/200 = 0.15$  vilket ger ca 96% effektivitet

För tre halvsinusfunktioner har vi  $B/L = 30/(200/3) = 0.45$  vilket ger ca 75% effektivitet.

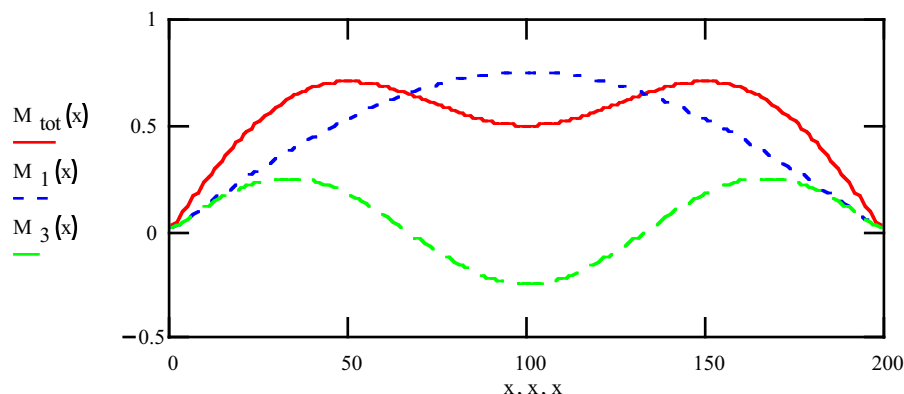
Vid sammansatta momentfördelningar "viktas" effektiviteten i förhållande till hur stor andel av spänningarna som i varje punkt  $x$  hänförs till varje harmonisk komponent enligt FA 2.2.14 (ef.6).

Momentfördelningarna ser ut som följer:

$$M := 1 \quad L := 200 \quad x := 1..199$$

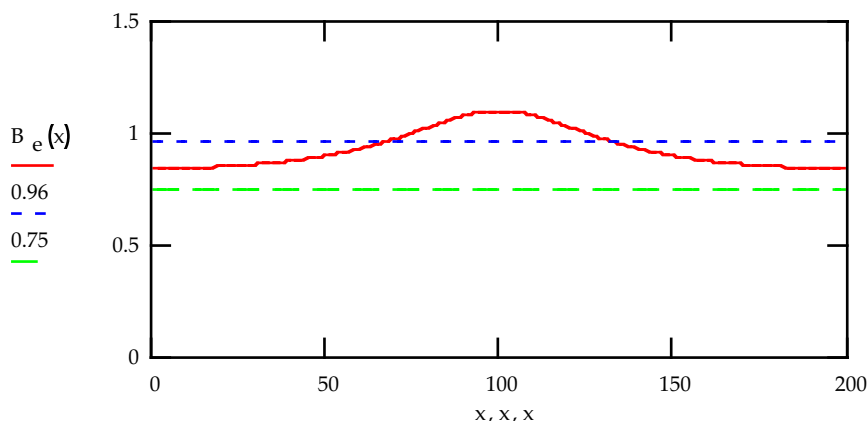
$$M_1(x) := \frac{3}{4} \cdot M \cdot \sin\left[\frac{\pi \cdot x}{L}\right] \quad M_3(x) := \frac{1}{4} \cdot M \cdot \sin\left[\frac{3 \cdot \pi \cdot x}{L}\right]$$

$$M_{\text{tot}}(x) := M_1(x) + M_3(x)$$



Vi uppskattar förenklat böjmotståndet för fartygstvärsnittet som funktion av effektiviteten i däcket med användande av tidigare def funktion  $W_1$ :

$$W_{\text{dk}}(B\%) := W_1(B\% \cdot 30, 0.03, 19, 0.04, 30, 0.06) \quad B_e(x) := \frac{0.96 \cdot \frac{M_1(x)}{W_{\text{dk}}(0.96)} + 0.75 \cdot \frac{M_3(x)}{W_{\text{dk}}(0.75)}}{\frac{M_1(x)}{W_{\text{dk}}(0.96)} + \frac{M_3(x)}{W_{\text{dk}}(0.75)}}$$



$$B_e(50) = 0.9$$

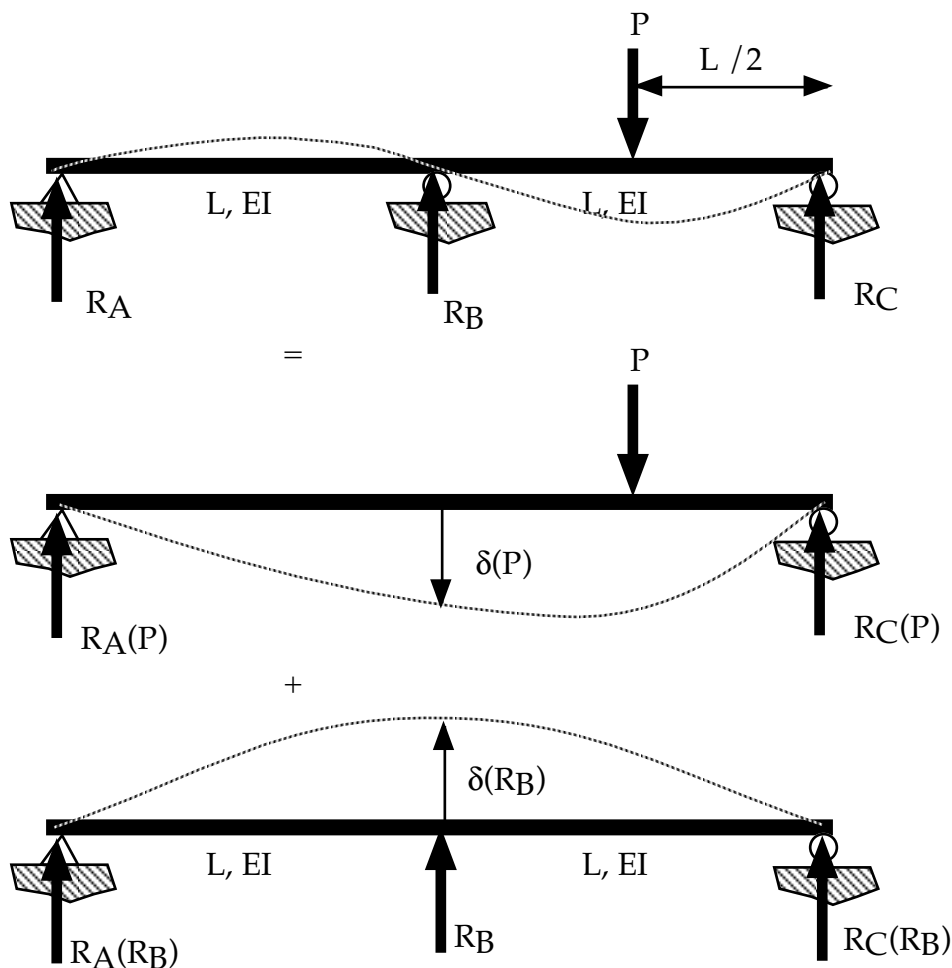
$$B_e(150) = 0.9$$

$$B_e(199) = 0.845$$

Kommentar: I realiteten gör skotten och tvärförbanden att effektiviteten är ännu högre

B2.3:

Vi reducerar systemet med avseende på infästningar så att det blir statiskt bestämt och delar upp det i två belastningsfall, dels ett yttre och dels ett som motsvarar den reducerade reaktionskraften. Villkoret att deformationen vid den reducerade infästningspunkten räknat som summan av lastfallen skall bli noll ger möjlighet att lösa ut reaktionskraftens storlek.



Jag använder här färdiga elementarfall för att lösa ut reaktionskrafter och deformationer men jag kunde lika gärna använt jämviktsvekvationer (eftersom dellösningarna är statiskt bestämda) samt "elastiska linjens ekvation". Hållf FS 1998 ger:

**Tabell 32.2** Elementarfall för fritt upplagd balk

Belastningsfall, $(a + \beta = 1)$	$\theta =$ vinkeländring, $\delta(\xi = x/l) =$ förskjutning
	$R_A = \beta P ; R_B = aP$ $\theta_A = \frac{Pl^2}{6EI} a\beta(1 + \beta) ; \theta_B = \frac{Pl^2}{6EI} a\beta(1 + a)$ $\delta(\xi) = \frac{Pl^3}{6EI} \beta[(1 - \beta^2)\xi - \xi^3] \quad \text{för } \xi \leq a$ $\delta(a) = \frac{Pl^3}{3EI} a^2 \beta^2$



B2.3 forts:

Ur elementarfallet erhålls:

$$\delta(P) := \frac{P \cdot (2 \cdot L)^3}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{1}{4} \left[ \left[ 1 - \left[ \frac{1}{4} \right]^2 \right] \cdot \frac{1}{2} - \left[ \frac{1}{2} \right]^3 \right] \quad \delta(P) := \frac{11}{96} \cdot P \cdot \frac{L^3}{(E \cdot I)}$$

$$\delta(R_B) := \frac{-R_B \cdot (2 \cdot L)^3}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{1}{2} \left[ \left[ 1 - \left[ \frac{1}{2} \right]^2 \right] \cdot \frac{1}{2} - \left[ \frac{1}{2} \right]^3 \right] \quad \delta(R_B) := \frac{-1}{6} \cdot R_B \cdot \frac{L^3}{(E \cdot I)}$$

deformationsvillkoret  $\delta = 0$  ger:

$$\left[ \frac{11}{96} \cdot P \cdot \frac{L^3}{(E \cdot I)} + \frac{-1}{6} \cdot R_B \cdot \frac{L^3}{(E \cdot I)} \right] := 0 \quad R_B := \frac{11}{16} \cdot P$$

a) utböjningsvinkeln i punkten C kan vi erhålla genom att superponera vinkeln enligt elementarfallet för de två belastningsfallen:

$$\Theta_C := \frac{P \cdot (2 \cdot L)^2}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{3}{4} \right] - \frac{R_B \cdot (2 \cdot L)^2}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \right] \quad \Theta_C := \frac{3}{64} \cdot P \cdot \frac{L^2}{(E \cdot I)}$$

b) ur jämvikt eller superponerade elementarfallet erhålls övriga reaktionskrafter:

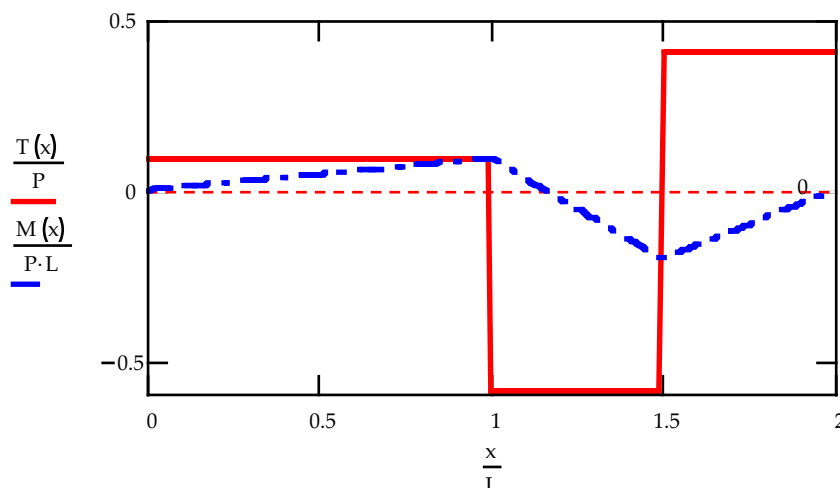
$$R_A := \frac{-3}{32} \cdot P \quad R_C := \frac{13}{32} \cdot P$$

Tvåkraft- och momentfördelningar kan vi direkt bestämma genom att integrera lasterna:

$$L := 1 \quad P := 1 \quad x := 0, 0.01 \cdot L \dots 2 \cdot L$$

$$T(x) := - \left[ \frac{-3}{32} \cdot P \right] + \text{if} \left[ x > L, - \left[ \frac{11}{16} \cdot P \right], 0 \right] + \text{if} \left[ x > \frac{3}{2} \cdot L, P, 0 \right]$$

$$M(x) := \int_0^x T(x) \, dx \quad M(x) := - \left[ \frac{-3}{32} \cdot P \cdot x \right] + \text{if} \left[ x > L, - \left[ \frac{11}{16} \cdot P \right] \cdot (x - L), 0 \right] + \text{if} \left[ x > \frac{3}{2} \cdot L, P \cdot \left[ x - \frac{3}{2} \cdot L \right], 0 \right]$$

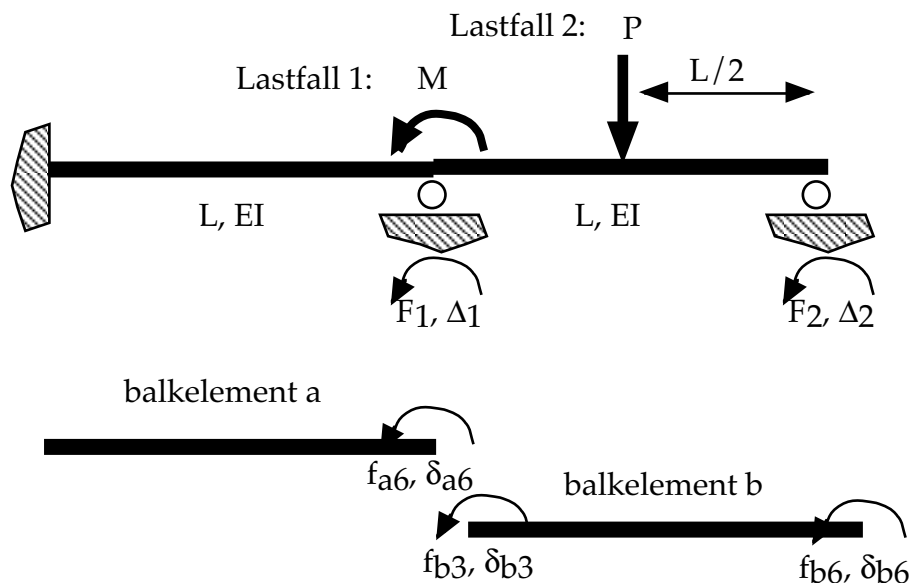


$$M(L) := \frac{3}{32} \cdot P \cdot L$$

$$M \left[ \frac{3}{2} \cdot L \right] := \frac{-13}{64} \cdot P \cdot L$$

B2.4:

Vi börjar med att definiera ingående element, numrera frihetsgrader, etc



index 3 resp 6 motsv frihetsgradsnumren i den generella styvhetsmatrisen FA 2.4.14.

a) Om vi inför randvillkoren (förhindrade frihetsgrader) redan på elementnivå blir det mycket enkelt att "bygga ihop" systemets styvhetsmatris:

$$K := \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & 0 \\ L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{bmatrix} \quad K := \frac{E \cdot I}{L} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mera formellt kunde vi ställt upp:

$$K := A \cdot k \cdot A^T \quad K := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ 0 & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad K := \frac{E \cdot I}{L} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

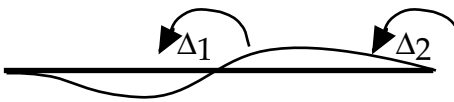
b) Systemförskjutningarna löser vi ur inversen på systemmatrisen:

$$F := K \cdot \Delta \quad \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} := \frac{E \cdot I}{L} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}$$

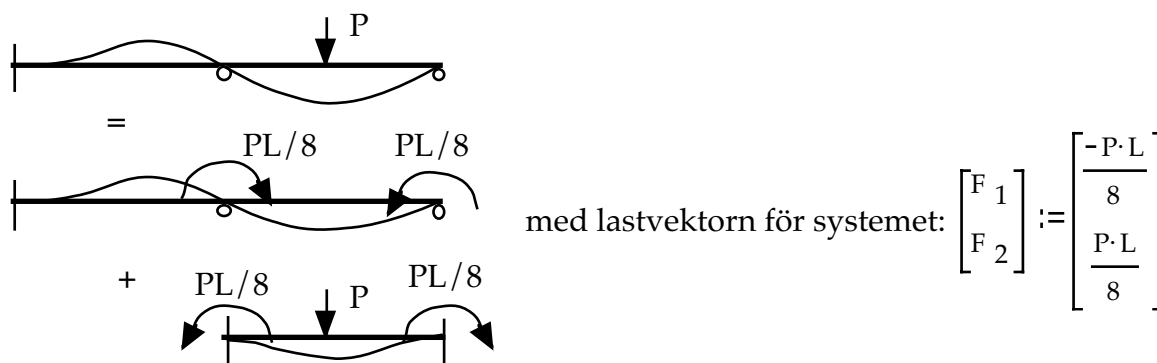
$$\Delta := K^{-1} \cdot F \quad \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} := \frac{L}{E \cdot I} \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{-1}{14} \\ \frac{-1}{14} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} := \frac{L}{E \cdot I} \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \cdot F_1 - \frac{1}{14} \cdot F_2 \\ \frac{-1}{14} \cdot F_1 + \frac{2}{7} \cdot F_2 \end{bmatrix}$$

B2.4 forts:

c) I lastfall 1 motsvarar det yttre nodmomentet  $M$  exakt systemlasten  $F_1$ , förskjutningarna (eg. rotationer här) blir då med de generella teckendefinitionerna:

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} := \frac{L}{E \cdot I} \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \cdot M - \frac{1}{14} \cdot 0 \\ -\frac{1}{14} \cdot M + \frac{2}{7} \cdot 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} := \frac{L}{E \cdot I} \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \cdot M \\ -\frac{1}{14} \cdot M \end{bmatrix}$$


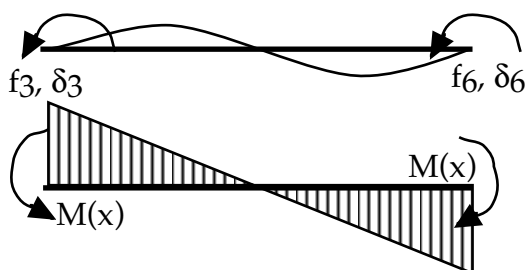
För lastfall 2 måste vi räkna fram ekvivalenta nodlaster vilka alltså motsvarar fastinspänningsreaktionerna med omvänt tecken för det belastade balkelementet. Vi separerar alltså systemlösning (som ger systemdeformationer) och lokal lösning som ger ett lokalt tillskott till deformationer bara i det belastade elementet:



systemförskjutningarna blir då:  $\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} := \frac{L}{E \cdot I} \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \cdot \frac{-P \cdot L}{8} - \frac{1}{14} \cdot \frac{P \cdot L}{8} \\ -\frac{1}{14} \cdot \frac{-P \cdot L}{8} + \frac{2}{7} \cdot \frac{P \cdot L}{8} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} := \frac{L^2}{E \cdot I} \begin{bmatrix} -\frac{3}{112} P \\ \frac{5}{112} P \end{bmatrix}$

d) Momentfördelningen kan nu erhållas från elementstyvhetmatrisen (-erna). Om balkelementen är obelastade mellan sina noder är tvärkraften konstant och momentet linjärt varierande. Ändmomenten  $f_3$  resp  $f_6$  motsvarar snittmomenten  $M(0)$  resp  $M(L)$  i varje balkelement, observera dock teckendefinitionerna som ger:

$$M(0) = f_3 \quad \text{och} \quad M(L) = -f_6$$



För lastfall 2 måste man dessutom superponera den lokala momentfördelningen i tillägg till momentfördelningen från systemförskjutningarna.

B2.4 forts:

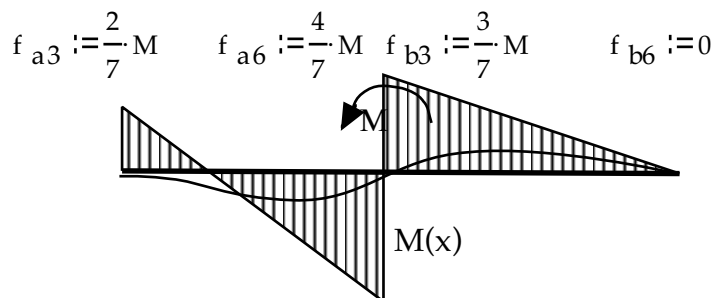
d) den allmänna elementstyvhetmatrisen är:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix}$$

vi identifierar förskjutningsvektorn för de båda balkelementen a resp b och kan direkt räkna ut ändmomenten som funktion av systemförskjutningarna:

$$\begin{bmatrix} \delta_{a1} \\ \delta_{a2} \\ \delta_{a3} \\ \delta_{a4} \\ \delta_{a5} \\ \delta_{a6} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} f_{a3} := \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \Delta_1 \\ f_{a6} := \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \Delta_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} \delta_{b1} \\ \delta_{b2} \\ \delta_{b3} \\ \delta_{b4} \\ \delta_{b5} \\ \delta_{b6} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_1 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} f_{b3} := \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \Delta_1 + \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \Delta_2 \\ f_{b6} := \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \Delta_1 + \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \Delta_2 \end{matrix}$$

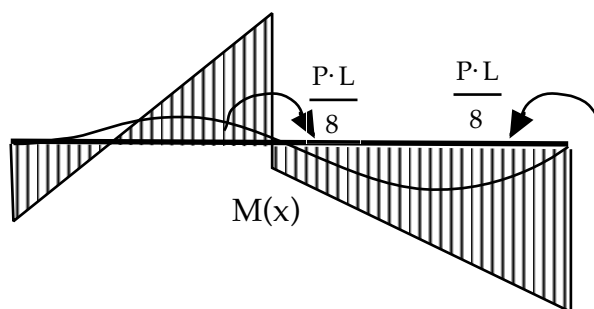
För lastfall 1 får vi med insatta förskjutningar enl c) ovan:  $\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} := \frac{L}{E \cdot I} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \cdot M \\ -\frac{1}{14} \cdot M \end{bmatrix}$



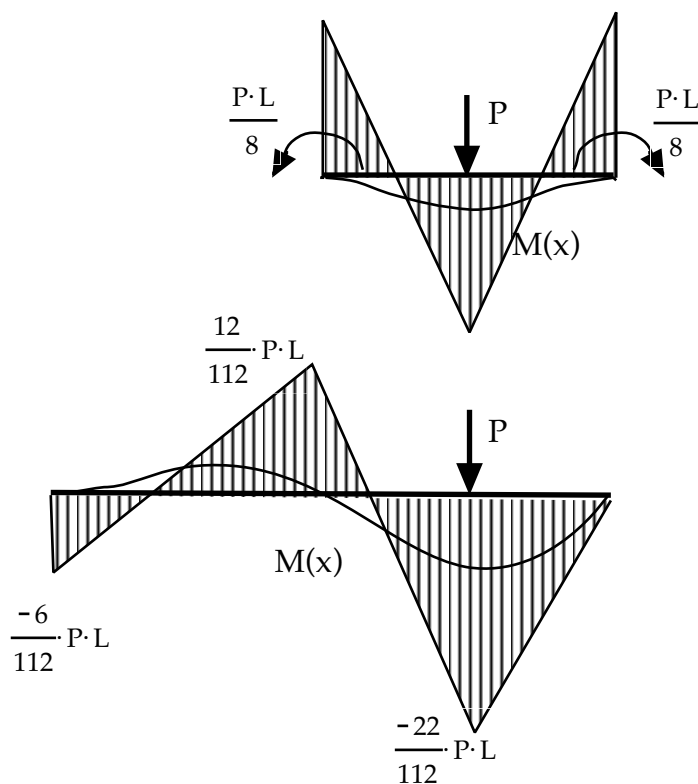
B2.4 d) forts:

För lastfall 2 får vi med insatta förskjutningar enl c) ovan: 
$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} := \frac{L^2}{E \cdot I} \begin{bmatrix} -\frac{3}{112} \cdot P \\ \frac{5}{112} \cdot P \end{bmatrix}$$

$$f_{a3} := \frac{-6}{112} \cdot P \cdot L \quad f_{a6} := \frac{-12}{112} \cdot P \cdot L \quad f_{b3} := \frac{-2}{112} \cdot P \cdot L \quad f_{b6} := \frac{14}{112} \cdot P \cdot L$$



till vilket skall superponeras den lokala lösningen för att erhålla den verkliga momentfördelningen:



Jämfört med uppgift B2.3 b) ser vi att maxmomentet bara har minskat med  $PL/32$  när vänsterändan spändes in jämfört med när den var rotationsfri. Detta motsvarar mindre än 20% minskning. Av detta kan man (möjligen) dra slutsatsen att inspänningsförhållandena ett par balkar bort från den belastade balken inte spelar så stor roll för spänningarna.

B2.4 d) forts:

Avslutningsvis visar jag här hur en rent matrisbaserad beräkning skulle kunna formuleras. Jag bryr mig inte här om att föra med alla styvhetsbidragen till systemnivå och sedan reducera bort dem där pga randvillkor (det tar för stor plats!) istället använder jag färdigt reducerade elementstyvhetsmatriser. Beräkningen av systemförskjutningar och systemmoment blir nu mycket kompakt:

för B2.4. lastfall 2 ser en komplett lösning ut så här:

$$k := \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ 0 & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{bmatrix} \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_{eq} := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-P \cdot L}{8} \\ \frac{P \cdot L}{8} \end{bmatrix}$$

$$K := A \cdot k \cdot A^T \quad F := F_n + A \cdot f_{eq} \quad \Delta := K^{-1} \cdot F \quad \delta := A^T \cdot \Delta \quad f := k \cdot \delta - f_{eq}$$

$$\frac{\delta}{\begin{bmatrix} P \cdot L^2 \\ E \cdot I \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -0.027 \\ -0.027 \\ 0.045 \end{bmatrix} \quad \frac{f}{P \cdot L} = \begin{bmatrix} -0.107 \\ 0.107 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och motsvarande för uppgift B2.3 med matrismetod:

$$k := \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & 0 \\ \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ 0 & 0 & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{bmatrix} \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_{eq} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-P \cdot L}{8} \\ \frac{P \cdot L}{8} \end{bmatrix}$$

$$K := A \cdot k \cdot A^T \quad F := F_n + A \cdot f_{eq} \quad \Delta := K^{-1} \cdot F \quad \delta := A^T \cdot \Delta \quad f := k \cdot \delta - f_{eq}$$

$$\frac{\delta}{\begin{bmatrix} P \cdot L^2 \\ E \cdot I \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0.016 \\ -0.031 \\ -0.031 \\ 0.047 \end{bmatrix} \quad \frac{f}{P \cdot L} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.094 \\ 0.094 \\ 0 \end{bmatrix}$$

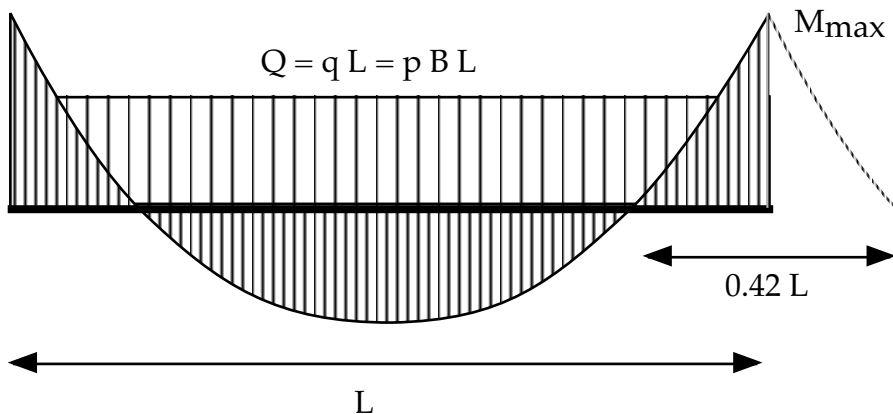
vi återfinner här förstås vår tidigare lösning

$$\Theta_C := \frac{3}{64} \cdot \frac{P \cdot L^2}{E \cdot I} \quad \frac{\Theta_C}{\begin{bmatrix} P \cdot L^2 \\ E \cdot I \end{bmatrix}} = 0.047 \quad \frac{\delta_4}{\begin{bmatrix} P \cdot L^2 \\ E \cdot I \end{bmatrix}} = 0.047$$

B2.5

Så som uppgiften är formulerad är beräkningsmodellen given: fast inspänd balk, med jämnt utbredd last.

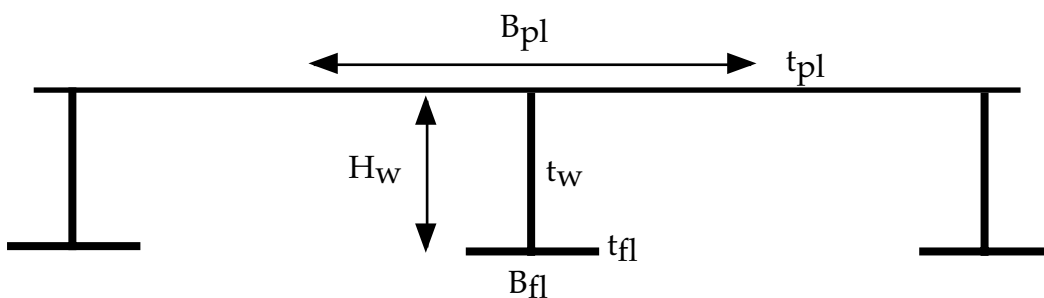
Ur elementarfall (om man inte redan lärt sig det utantill) får vi momentfördelningen, och beräkningsmodellen blir enligt följande:



$$B := 1.8 \quad L := 20.4 \quad p := 3000 \cdot 9.81 \quad q := p \cdot B \quad Q := q \cdot L$$

$$M_{\max} := \frac{Q \cdot L}{12} \quad M_{\max} = 1.837 \cdot 10^6$$

Om vi approximativt ansätter momentfördelningen vid inspänningen motsvarande en punktlast på en fritt upplagd balk med längden  $0.42 L$ . Kan vi uppskatta effektiviteten i plåtflänsen ur Diagram IIIb (FA 2.2.19). Tvärsnittsgeometrin och sektionskonstanten  $\beta$  enligt (ef.9) blir:



$$B_{pl} := 1.8 \quad t_{pl} := 0.014 \quad H_w := 0.6 \quad t_w := 0.02 \quad B_{fl} := 0.5 \quad t_{fl} := 0.04$$

$$\beta := \frac{H_w \cdot t_w \cdot (4 \cdot B_{fl} \cdot t_{fl} + H_w \cdot t_w)}{4 \cdot B_{pl} \cdot t_{pl} \cdot (3 \cdot B_{fl} \cdot t_{fl} + H_w \cdot t_w)} \quad \beta = 0.152$$

med  $B/L = 1.8 / (0.42 \cdot 20.4) = 0.21$  kan vi läsa av en plåt-effektivitet på ca 0.7.

B2.5 forts:

Böjmotståndet och maxspänningar kan då uppskattas till:

$$W_{pl} := W_1 (0.7 \cdot B_{pl} \cdot t_{pl} \cdot H_{w'} \cdot t_{w'} \cdot B_{fl} \cdot t_{fl}) \quad W_{fl} := W_2 (0.7 \cdot B_{pl} \cdot t_{pl} \cdot H_{w'} \cdot t_{w'} \cdot B_{fl} \cdot t_{fl})$$

$$W_{pl} = 0.012$$

$$W_{fl} = 0.013$$

$$\sigma_{pl \max} := \frac{M_{\max}}{W_{pl}}$$

$$\sigma_{fl \max} := \frac{M_{\max}}{W_{fl}}$$

$$\sigma_{pl \max} = 1.589 \cdot 10^8$$

$$\sigma_{fl \max} = 1.413 \cdot 10^8$$

I detta fall blir faktiskt undre flänsen större än plåtflänsen, och de största spänningarna uppträder i plåten !! 160 MPa är precis på gränsen av vad klassen godkänner för vanligt fartygsstål. Vår beräkningsmodell är dessutom troligen konservativ (dvs på säkra sidan) inspänningen är inte helt fast och inspänningsmomentet något lägre än vad vi räknat med.

B2.6

a) Vid jämt utbrett däckstryck blir longitudinalerna symmetriskt belastade vilket motsvarar fast inspänning vid de tvärgående däcksbalkarna. effektiviteten kan vi uppskatta som den för en fritt upplagd balk med längden  $0.58 L$  (se fig på föreg sida) belastad med jämt utbredd last.

Diagram IIIb med  $B/L = 0.6 / (0.58 \cdot 1.8) = 0.57$  ger en relativ effektivitet på plåten på ca 0.7.

b) vid en punktlast (från hjultryck) är det mindre troligt att inspänningsförhållandet är helt symmetriskt. Vill man ligga på säkra sidan (vad gäller effektiviteten - men inte spänningarna) kan man dock fortfarande anta detta. Belastningsfallet motsvarar alltså punktlast på en balklängd av  $0.5 L$

Diagram IIIb med  $B/L = 0.6 / (0.5 \cdot 1.8) = 0.67$  och med  $\beta = 0.04$  ger en relativ effektivitet på plåten på ca 0.3. Ingen höjdare alltså, men fortfarande är plåtflänsen ca 4 ggr större än L-profilens fläns.

B2.7

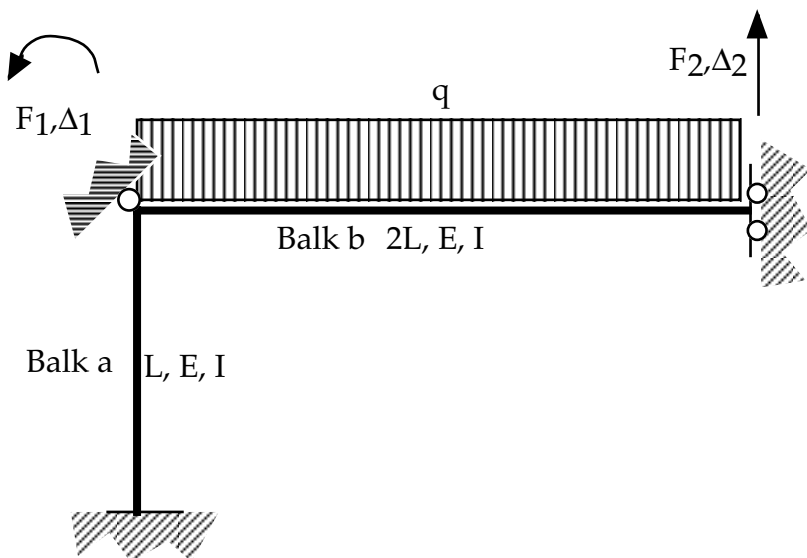
a)

Fast inspänning i sidotanken motiveras av att den är mycket styvare än övre sidovebben. Detta kan vara ett tveksamt antagande vad gäller mellanspanten, men säkert helt OK vad gäller vebbspanten (3.6 m delning). Rotationsleden i däckshörnet är väl motiverad av att alla axiella deformationer i sådana här konstruktioner är mycket mindre än böjdeformationerna. Slutligen momentinspänningen men fri rörelse i vertikalled i CL representerar ett symmetriskt snitt. (Detta förutsätter dock ett symmetriskt lastfall!)



B2.7, forts

b)  
balksystemet har endast två frihetsgrader numrerade enligt fig nedan. Styvhetsrelationen för systemet kan vi enkelt ta fram ur de lokala elementstyvheterna



$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} + \frac{4 \cdot E \cdot I}{(2 \cdot L)} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{(2 \cdot L)^2} \\ -\frac{6 \cdot E \cdot I}{(2 \cdot L)^2} & \frac{12 \cdot E \cdot I}{(2 \cdot L)^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} \text{ med inversen } \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{2}{[9 \cdot (E \cdot I)]} \cdot L & \frac{2}{[9 \cdot (E \cdot I)]} \cdot L^2 \\ \frac{2}{[9 \cdot (E \cdot I)]} \cdot L^2 & \frac{8}{[9 \cdot (E \cdot I)]} \cdot L^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Lastvektorn motsvaras här av de ekvivalenta nodkrafterna från den utbredda däckslasten q. Fastinspänningsreaktionerna med omvänt tecken ger oss:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{-q \cdot (2 \cdot L)^2}{12} \\ \frac{-q \cdot (2 \cdot L)}{2} \end{bmatrix} \text{ med den allmänna lösningen } \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{-8}{[27 \cdot (E \cdot I)]} \cdot L^3 \cdot q \\ \frac{-26}{[27 \cdot (E \cdot I)]} \cdot L^4 \cdot q \end{bmatrix}$$

c)  
Antar vi helt effektiva flänsar (vilket ofta är OK för styvheten) får vi följande ungefärliga numeriska värden:

$$E := 2.1 \cdot 10^{11} \quad L := 5.5 \quad I_{dk} := I(1.8, 0.014, 0.6, 0.02, 0.5, 0.04) \quad q := 2000 \cdot 9.81 \cdot 1.8$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{-8}{[27 \cdot (E \cdot I_{dk})]} \cdot L^3 \cdot q \\ \frac{-26}{[27 \cdot (E \cdot I_{dk})]} \cdot L^4 \cdot q \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.962 \cdot 10^{-3} \\ -0.035 \end{bmatrix}$$

dvs däckets böjning kommer att vara ca 3.5 cm vilket är helt rimligt (men ganska mycket).

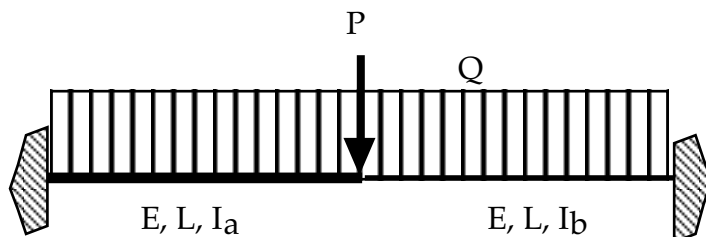
## Balkmetoder - Idealisering; Uppgifter

### Idealisering:

De första uppgifterna här syftar till att ge känsla för hur styvheten i balkelement påverkar lastfördelningen i strukturen.

### B2.8

Tag följande mycket enkla struktur bestående av 2 balkelement med samma längd  $L$  men olika styvhet (tröghetsmoment  $I_a$  resp  $I_b$ ).

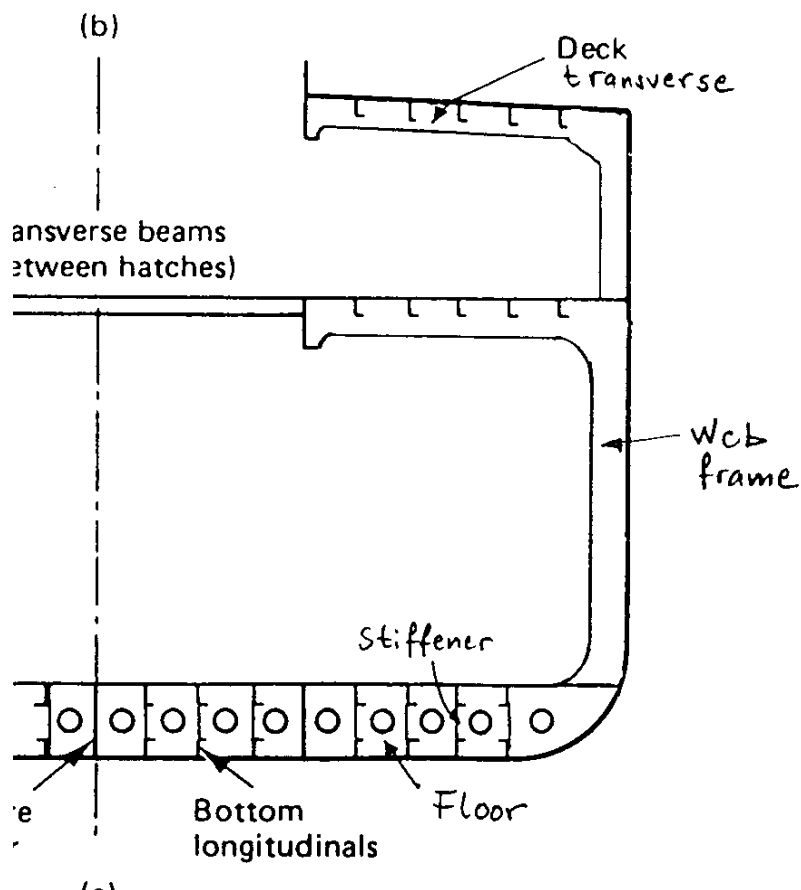


Använd matrismetod för att ställa upp styvhetsrelationen för de två frihetsgraderna rotation och vertikalförskjutning i mitten. (Lös gärna styvhetsrelationen om Du använder symboliskt matteprogram).

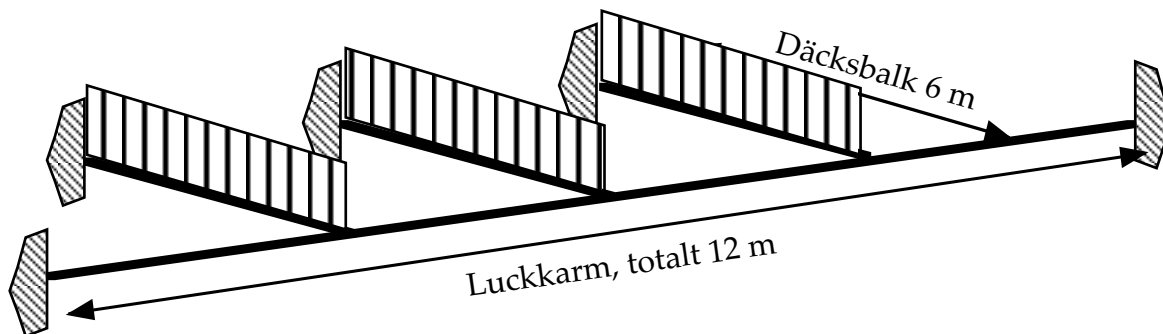
Försök skissa momentfördelningen i systemet för de båda lasttyperna  $P$  resp  $Q$  separat för följande fall:  $I_a = I_b$ ,  $I_a = 4I_b$ ,  $I_a \gg I_b$

### B2.9

Figuren här intill (ur FA 1.1.6) visar en ganska vanlig konstruktion för styckegodsartyg, kylfartyg etc. Däcken är förstyvade med longitudinaler som för över lasten till tvärgående däcksbalkar som i sin tur för över däckslasten dels till sidobordläggningen men också till en del till lucksidokarmen som i sin tur för lasten till tvärskeppsskotten. Om vi enbart studerar de primära styrkebärarna skulle ett sidodäck i ett 12 m långt lastrum kunna representeras av en enkel balkmodell enligt figuren på nästa sida. Luckkarmen kan med god noggrannhet antas vara fast inspänd i skotten pga symmetri, medan det är mera tveksamt om däcksbalkarna verkligen kan anses fast inspända i sidovebbarna.



B2.9 forts



Under antagande att däcksbalkarna är fast inspända i sidan enligt figuren - dvs att sidovebbarna är mycket böjstyva - skissa hur momentfördelningen i däcksbalkarna ser ut om:

- lucksidokarmen är mycket böjstyv och mycket vridstyv
- lucksidokarmen är mycket böjstyv men vridvek
- lucksidokarmen är både böj- och vridvek  
(i förhållande till däcksbalkarnas styvhet)

Skissa motsvarande momentfördelningar under antagande att sidovebben är böjvek

Om man vill dimensionera däcksbalkarna noggrannt, men med en liten lokal balkmodell, skulle man kunna ersätta sidovebbarna med en vridfjäder  $k_1$  och lucksidokarmen med en translationsfjäder  $k_2$  enligt figur nedan.



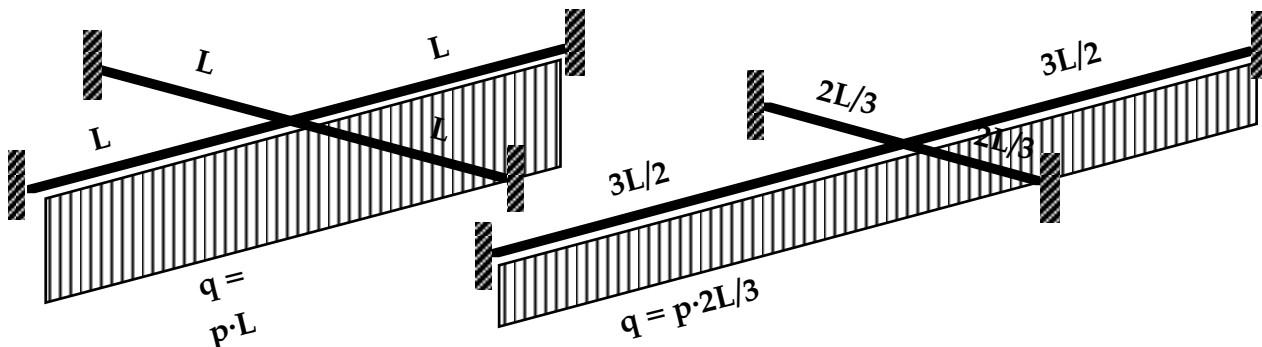
Ställ upp ett allmänt uttryck för fjäderkonstanten  $k_2$  för däcksbalken mitt i lastrummet, använd generella beteckningar för luckkarmens styvhet.

Diskutera om  $k_1$  resp  $k_2$  kommer att vara lika stora för alla tre däcksbalkarna ??

B2.10

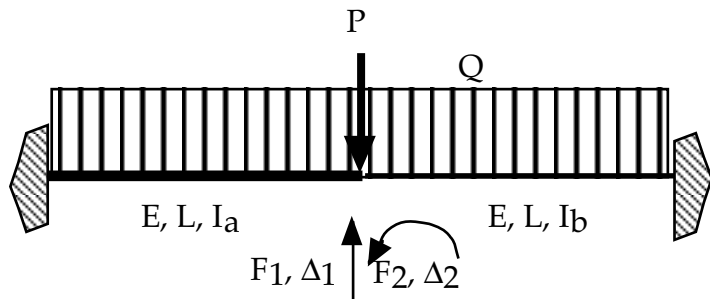
Bestäm med "direkt" metod gränslasten för kollaps genom plasticering för följande två alternativa gallerverk med lika stor total last och total balklängd.

Alla balkar antas ha samma  $E$ ,  $I$ ,  $M_p$ ,  $W$  etc



## Balkmetoder - Idealisering; Förslag till lösningar

B2.8:



Styvhetsmatrisen för systemet erhålls genom att superponera styvheterna från element a (frihetsgrader 5 och 6) med styvheterna från element b (frihetsgrader 2 och 3):

$$K := \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot E \cdot I_a}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I_a}{L^2} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I_a}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I_a}{L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot E \cdot I_b}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I_b}{L^2} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I_b}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I_b}{L} \end{bmatrix} \quad K := \begin{bmatrix} 12 \cdot E \cdot \frac{(I_a + I_b)}{L^3} & 6 \cdot E \cdot \frac{(-I_a + I_b)}{L^2} \\ 6 \cdot E \cdot \frac{(-I_a + I_b)}{L^2} & 4 \cdot E \cdot \frac{(I_a + I_b)}{L} \end{bmatrix}$$

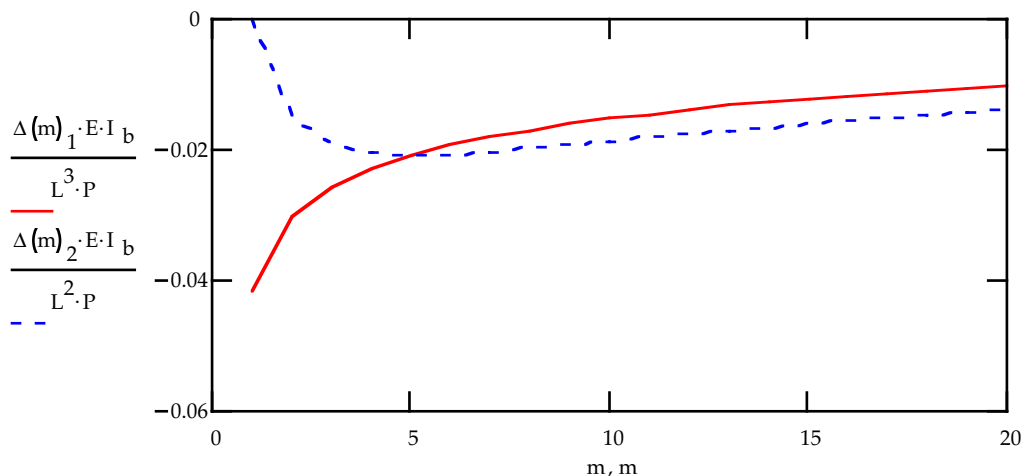
om vi uttrycker tröghetsmomentet  $I_a$  som  $m \cdot I_b$  kan vi skriva:

$$K(m) := \begin{bmatrix} 12 \cdot E \cdot \frac{(m \cdot I_b + I_b)}{L^3} & 6 \cdot E \cdot \frac{(-m \cdot I_b + I_b)}{L^2} \\ 6 \cdot E \cdot \frac{(-m \cdot I_b + I_b)}{L^2} & 4 \cdot E \cdot \frac{(m \cdot I_b + I_b)}{L} \end{bmatrix}$$

Systemlastvektorer för de bägge lasterna P resp Q blir:  $\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -P \\ 0 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -Q/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vilket ger följande förskjutningar för varierande m:

$$\Delta(m) := K(m)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -P \\ 0 \end{bmatrix} \quad m := 1..20$$



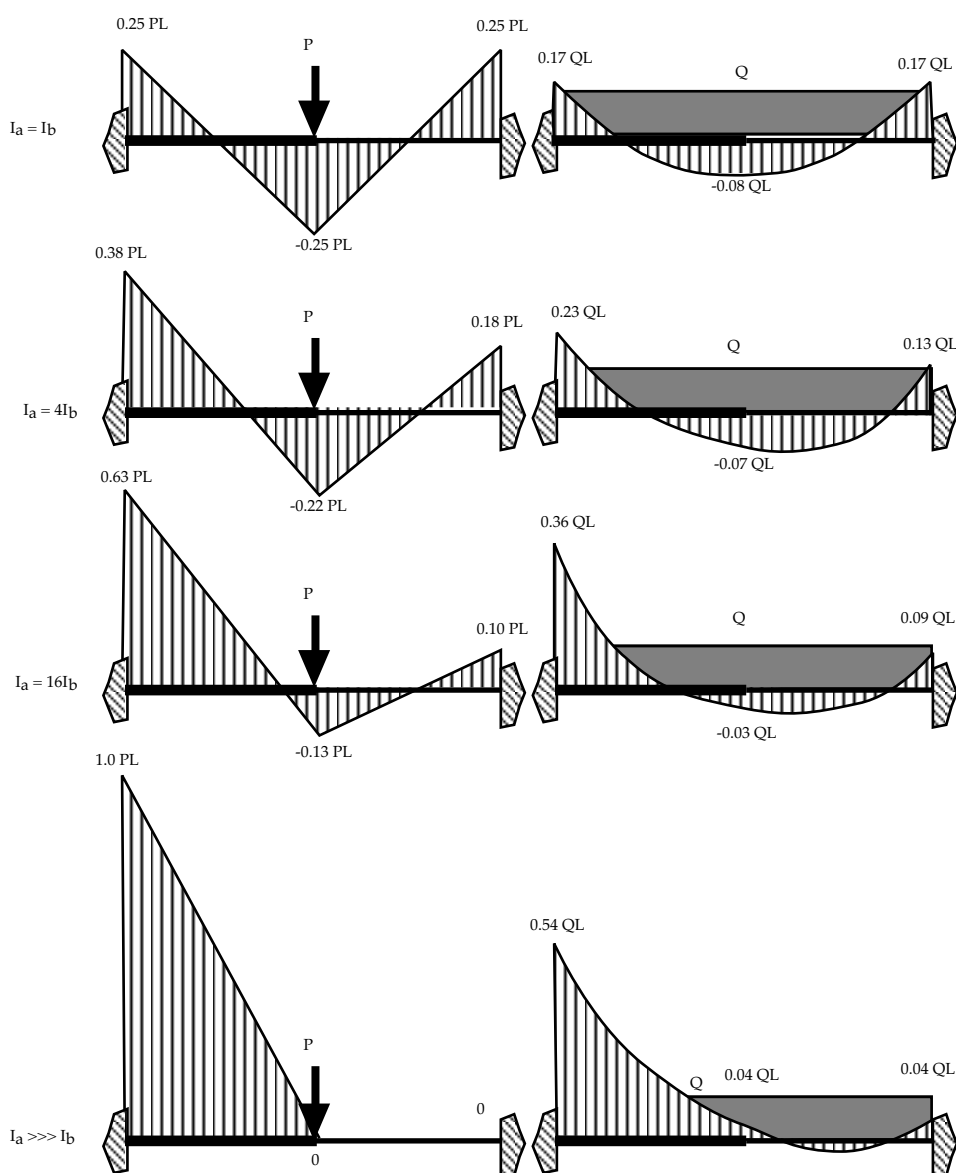
B2.8 forts:

Ändmomenten i de bägge balkelementen från systemförskjutningarna blir:

$$f_{a3}(m) := -\frac{6 \cdot E \cdot m \cdot I_b}{L^2} \cdot \Delta(m)_1 + \frac{2 \cdot E \cdot m \cdot I_b}{L} \cdot \Delta(m)_2 \quad f_{b3}(m) := \frac{6 \cdot E \cdot I_b}{L^2} \cdot \Delta(m)_1 + \frac{4 \cdot E \cdot I_b}{L} \cdot \Delta(m)_2$$

$$f_{a6}(m) := -\frac{6 \cdot E \cdot m \cdot I_b}{L^2} \cdot \Delta(m)_1 + \frac{4 \cdot E \cdot m \cdot I_b}{L} \cdot \Delta(m)_2 \quad f_{b6}(m) := \frac{6 \cdot E \cdot I_b}{L^2} \cdot \Delta(m)_1 + \frac{2 \cdot E \cdot I_b}{L} \cdot \Delta(m)_2$$

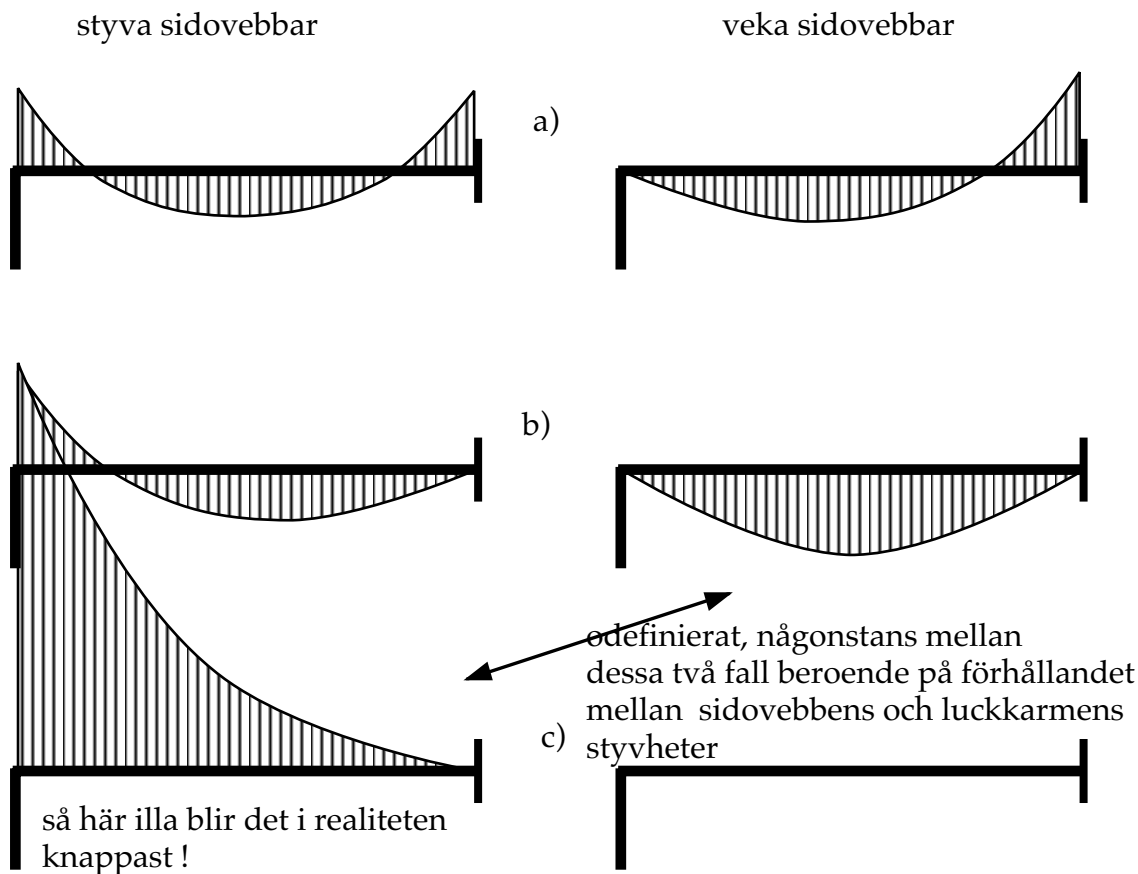
För de två lastfallen får vi följande fördelningar när vi även superponerat den lokala elementlasten vid det utbredda lastfallet:



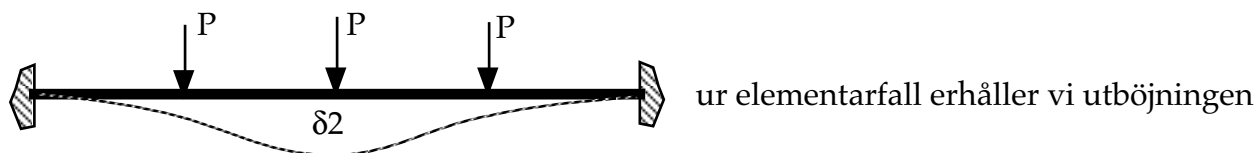
Vi ser att den styvare balken succesivt tar alltmer av lasten. Samma sak gäller i fartygskonstruktioner, de styvare (ofta kortare) styrkebärarna tar merparten av lasten (vilket inte nödvändigtvis behöver betyda att spänningarna blir högst där).

B2.9:

Momentfördelningarna blir i princip enligt nedanstående elementarfall:



Fjäderkonstanten  $k_2$  beräknas ur förhållandet mellan överförd kraft från däcksbalkarna och nedböjning vid luckkarmen. Antag att överförd kraft från varje däcksbalk är  $P$  (motsvarar reaktionskrafterna på grund av lokala utbredda lasten  $Q$ , storleken ointressant för beräkning av fjäderkonstanten).



$$\delta \left[ \frac{L_k}{2} \right] := \frac{1}{96} \cdot P \cdot \frac{L_k^3}{(E \cdot I)}$$

där  $L_k$  är luckkarmens totala längd, (i exemplet = 2 · däcksbalkens längd)

och  $I$  är luckkarmens tröghetsmoment vid vertikal böjning

se uträkningen på nästa sida. Fjäderkonstanten blir

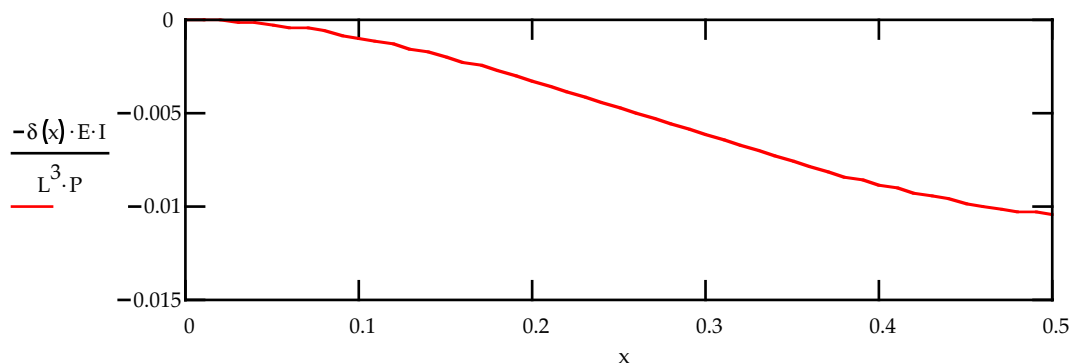
$$k_2 := \frac{P}{\delta \left[ \frac{L_k}{2} \right]} \quad k_2 := \frac{96}{L_k^3} \cdot E \cdot I$$

B2.9 forts:

$$\delta(x) := 2 \cdot \left[ P \cdot \left[ \frac{L}{4} \right]^2 \cdot \frac{x^2}{6 \cdot L^3 \cdot E \cdot I} \left[ 3 \cdot 3 \cdot \frac{L^2}{4} - x \cdot \left[ 2 \cdot 3 \cdot \frac{L}{4} + L \right] \right] \right] + P \cdot \left[ \frac{L}{2} \right]^2 \cdot \frac{x^2}{6 \cdot L^3 \cdot E \cdot I} \left[ 3 \cdot \frac{L^2}{2} - x \cdot \left[ 2 \cdot \frac{L}{2} + L \right] \right]$$

$$\delta(x) := \frac{-1}{192} \cdot P \cdot x^2 \cdot \frac{(-21 \cdot L + 26 \cdot x)}{(E \cdot I)} \quad \delta \left[ \frac{L}{2} \right] := \frac{1}{96} \cdot P \cdot \frac{L^3}{(E \cdot I)}$$

$$x := 0, 0.01 \cdot L \dots 0.5 \cdot L$$



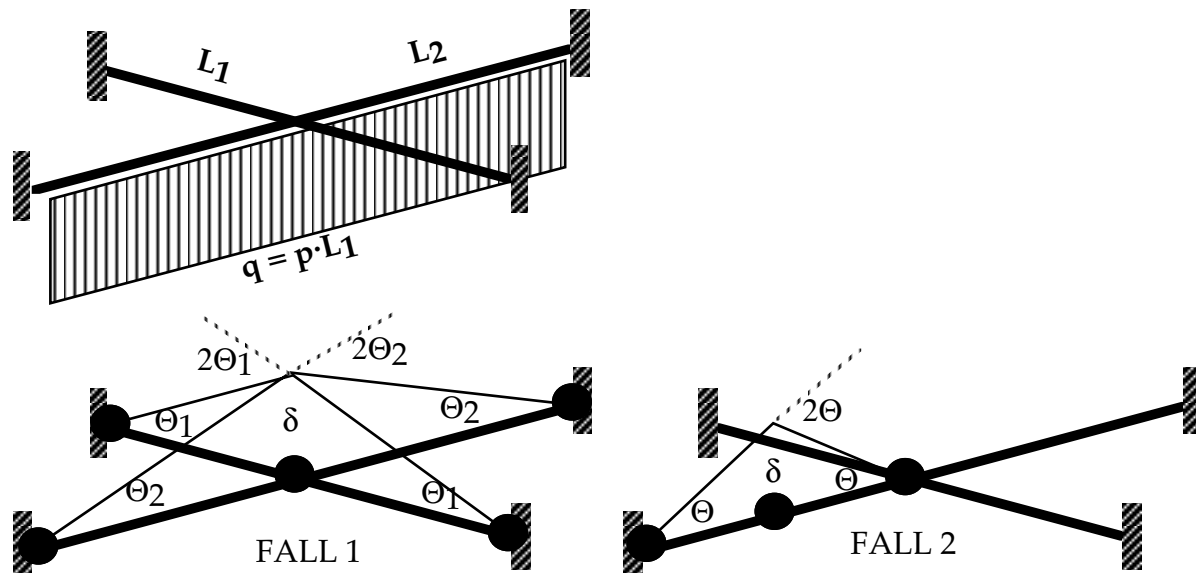
Fjäderkonstanten  $k_2$  kommer att variera beroende på vilken däcksbalk som modelleras, luckkarmen deformeras naturligtvis allt mindre ju närmare skottet däcksbalken sitter.

$k_1$  däremot som skall efterlika sidovebbens inspänning är oberoende av positionen eftersom varje sidovebb i princip bär sin "egen" däcksbalk" oberoende av de andra.

B2.10:

Det finns egentligen bara två tänkbara kollapsformer (som jag kan se?)

Den ena att hela strukturen kollapsar dvs flytleder uppstår i varje randpunkt samt på mitten, och den andra att en lokalt belastad balk kollapsar med 3 flytleder.



Den inre energin,  $U$ , beräknas som  $M_P \cdot \Theta$  i varje flytled

Det yttre arbetet,  $W$ , beräknas som lasten gånger medelförflyttningen ( $\delta/2$ )

$$\text{För Fall 1: } W(L_1, L_2) := p \cdot L_1 \cdot 2 \cdot L_2 \cdot \frac{\delta}{2} \quad U(L_1, L_2) := M_P \cdot \left[ \frac{\delta}{L_2} + 2 \cdot \frac{\delta}{L_2} + \frac{\delta}{L_2} + \frac{\delta}{L_1} + 2 \cdot \frac{\delta}{L_1} + \frac{\delta}{L_1} \right]$$

$$\text{För Fall 2: } W(L_1, L_2) := p \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot \frac{\delta}{2} \quad U(L_1, L_2) := M_P \cdot \left[ \frac{2 \cdot \delta}{L_2} + 2 \cdot \frac{2 \cdot \delta}{L_2} + \frac{2 \cdot \delta}{L_2} \right]$$

Gränslasten för de olika fallen uttryckt som tryck,  $p_{ult}$ , får vi genom att sätta  $U = W$

$$p_{ult1} := 4 \cdot M_P \cdot \frac{(L_1 + L_2)}{(L_2^2 \cdot L_1^2)} \quad p_{ult2} := 16 \cdot \frac{M_P}{(L_2^2 \cdot L_1)}$$

För  $L_1 = L_2 = L$ :

$$p_{ult1} := 8 \cdot \frac{M_P}{L^3} \quad p_{ult2} := 16 \cdot \frac{M_P}{L^3}$$

För  $L_1 = 2L/3$  och  $L_2 = 3L/2$ :

$$p_{ult1} := \frac{26}{3} \cdot \frac{M_P}{L^3} \quad p_{ult2} := \frac{32}{3} \cdot \frac{M_P}{L^3}$$



B2.10 forts:

I bägge geometrierna är det alltså "total" kollapsen av hela gallerverket som sker först (vid läggs gränslast), men i den mera avlånga geometrin ligger fallen nära varandra.

Observera också att den kvadratiske strukturen har lägsta gränslasten !

Om man (som överkurs) studerar deformationerna i mitten (systemet har bara denna enda frihetsgrad) så får man allmänt:

$$\Delta := \frac{1}{\left[ \frac{24 \cdot E \cdot I}{L_1^3} + \frac{24 \cdot E \cdot I}{L_2^3} \right]} \cdot \frac{Q}{2}$$

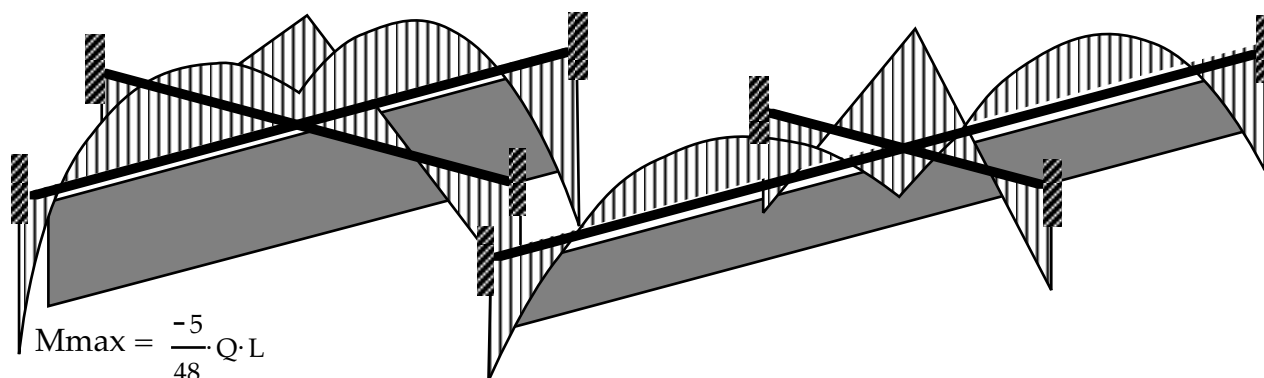
vilket ger för den kvadratiske strukturen:  $\Delta := \frac{Q \cdot L^3}{96 \cdot (E \cdot I)}$

och för den avlånga bara knappt hälften:  $\Delta := \frac{9 \cdot Q \cdot L^3}{1586 \cdot (E \cdot I)}$

Momentfördelningarna i ungefär jämförbar skala:

Maxmomentet uppträder i det kvadratiske gallerverket vid inspanningen av den belastade balken.

Den obelastade (tvär-)balken får ca 20% högre moment i den avlånga geometrin



## Balkmetoder - Torsion; Uppgifter

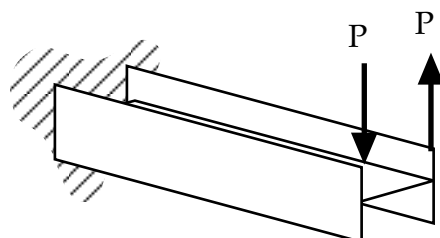
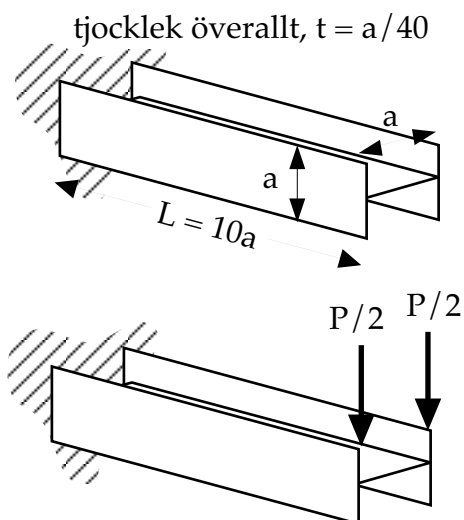
B2.11

Antag en konsolbalk med dimensioner enligt figuren här intill. Du ska nu räkna deformationer och spänningar med både vanlig teknisk balkteori (slank balk) och med teorin för välv torsion.

a)

Ta ur elementarfall eller på annat lämpligt sätt fram uttryck för momentfördelning och utböjning under antagande att balken är belastad med en punktkraft  $P$  i ytterändan (enligt fig).

Skissa (överdrivet) hur hela balksidans ränder kommer att deformeras samt rita in spänningsfördelningen i sidan vid infästningen.



b)

Antag nu istället att balken är belastad med ett vridmoment  $Pa$ . Eftersom det liggande plåtfältet i mitten inte belastas med några böjspänningar kan man i princip betrakta båda sidorna som separata balkar som böjs under  $P$  åt varsitt håll. Skissa spänningsfördelning och utböjningsfigur för detta fall.

c)

Räkna istället torsionsteori på fall b) ovan:

Pga symmetri är det lätt att inse att skjuvcentrum ligger i balkens sektioncentrum.

Beräkna

vridstyvhets tvärsnittsfaktor	$K$
normerad sektoriell koordinat	$\omega_n$
sektoriellt tröghetsmoment	$I_\omega$

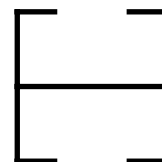
Bestäm bimomentet vid infästningen och därtill kopplade välvnormalspänningar med hjälp av fullständiga diffekvationens lösning och lämpliga randvillkor (*tors 14*).

Jämför resultatet med b) ovan!

d)

Skissa (utan att räkna) hur spänningsfördelningen skulle se ut om balken hade ett flänsat tvärsnitt enligt fig här intill.

På vilket sätt skiljer sig denna spänningsfördelning från den man kunde räkna ut med balkböjning, analogt med b) ovan? Varför?



B2.12

Verifiera med egna beräkningar fördelningen av bimoment enligt typexempel i FA 2.7.16 Exempel 2, Vålvfast-vålvfast.

Gör motsvarande beräkning med balkböjningsanalogi enligt FA 2.7.19 (trots att det egentligen inte är korrekt då  $kL = 3$ ). Hur stort blir felet?

B2.13:

På följande sida visas en skiss på ett nytt ekologiskt koncept för transport av timmer kring våra sjöar och i skärgårdarna.

Flytetyget är en 40 m självdriven symmetrisk öppen pråm med kranar, framdrivnings och manöverplatser på däcken i båda ändskeppen. Hela pråmen har enkel bordläggning och är förstyvad med kraftiga tvärgående vebbspann.

Båda ändskeppen är avskilda med ett vattentätt pikskott 5 m in. För och akterpikarna inrymmer framdrivnings- och hydraulmaskineri och ger dessutom pråmen möjlighet att överleva läckage i det öppna lastrummet.

a)

Beräkna sektionsdata: Skjuvcentrum,  $K$ ,  $I_{\omega}$ , och  $\omega$ -fördelning i tvärsnittet.

Antag i uppgifterna nedan att pråmen är öppen och helt prismatisk över en längd av 35 m.

b)

Utgå från att för/akterdäck utgör stora välvningsförhinder som kan modelleras genom att anta pråmen vara helt välvfast inspänd i ändarna av beräkningsmodellen.

Bestäm total vridningsvinkel och största välvnormalspänning då ena kranen lyfter en last av 20 ton, 20 m ut från centerlinjen. (upprätande moment erhålls från det hydrostatiska trycket när pråmen kränger).

c)

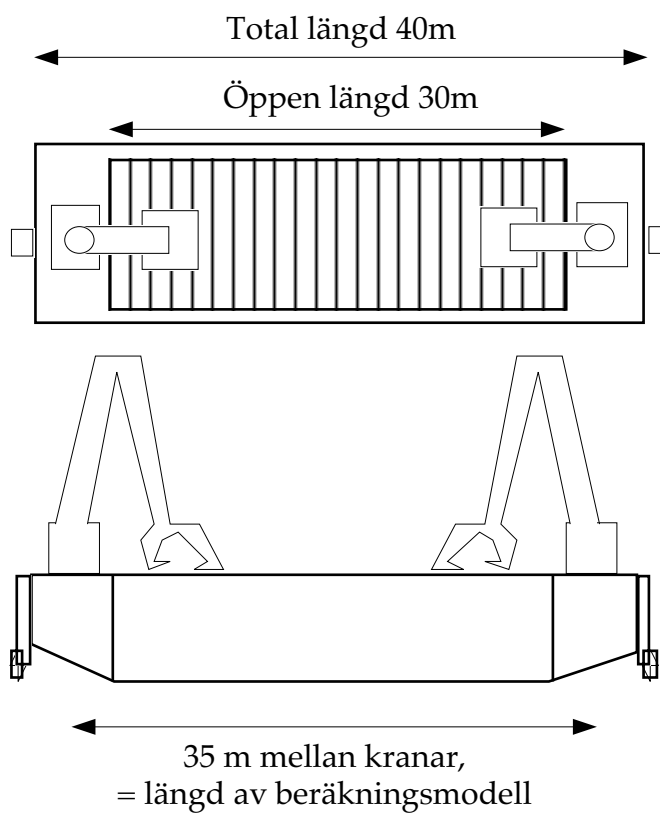
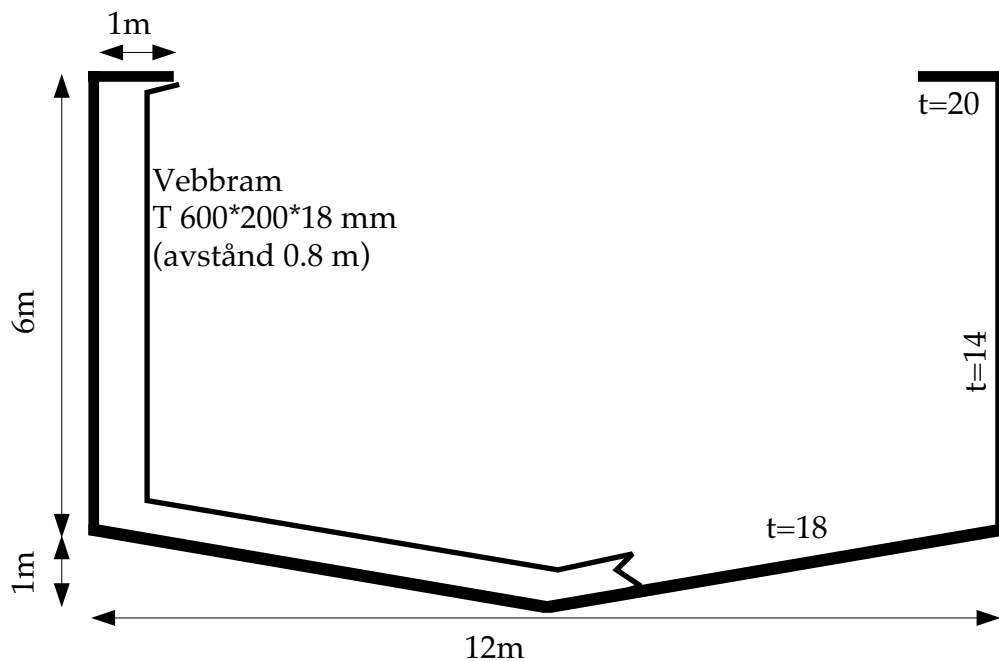
Beräkna vad motsvarande vridningsvinkel skulle bli om däcken togs bort så att pråmen blev helt öppen. (Bli inte förvånad av resultatet, dra istället någon slutsats !)

d)

Följ beräkningsgången enligt FA 2.7.25-29 och försök ta hänsyn till det "verkliga" inspänningsförhållandet vid pråmens ändar på grund av tvärskeppsdäcken.

Ansätt här att såväl skott som bordläggning medverkar med ca 20% av höjden som flänsar till däckstrimlorna vid böjning i däckplanet. Jämför vridning och välvnormalspänningar med vad Du fick för resultat enligt b) ovan.

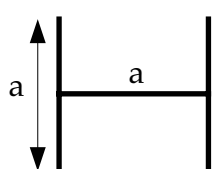
Figurbilaga till B2.13



## Balkmetoder - Torsion; Förslag till lösningar

B2.11:

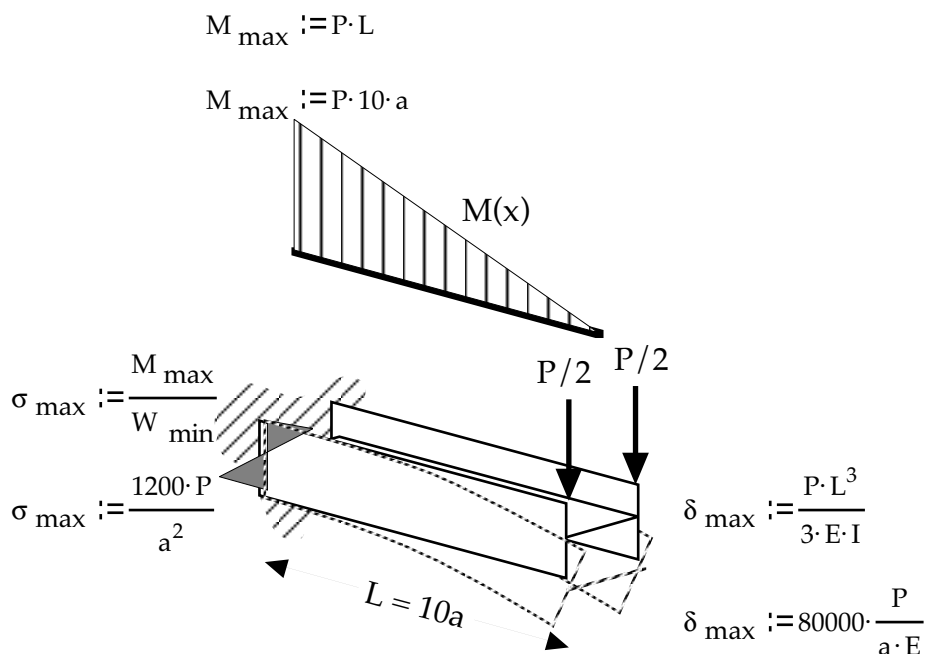
Vi börjar med att räkna sektionsdata för I-balken i böjning:



$$I := 2 \cdot \frac{a^3 \cdot \left[ \frac{a}{40} \right]}{12} + \frac{\left[ \frac{a}{40} \right]^3 \cdot a}{12} \quad I := \frac{a^4}{240}$$

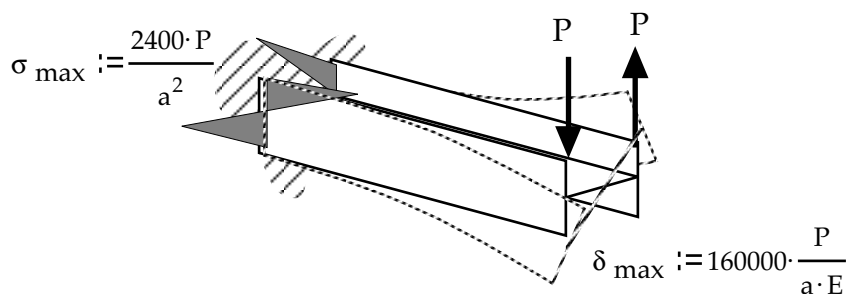
$$W_{\min} := \frac{I}{\left[ \frac{a}{2} \right]} \quad W_{\min} := \frac{a^3}{120}$$

a) Ur elementarfall erhåller vi momentfördelning och nedböjning:



b)

Vid vridmoment  $Pa$  kommer i princip de båda balksidorna att böjas åt varsitt håll, under lasten  $P$  (uppåt resp. nedåt)



B2.11 forts:

c)

Vi räknar nu lösning med "torsionsteori" istället:

Vridstyvhets tvärsnittsfaktor (*tors.1*):

$$K := \frac{1}{3} \sum_i (b \cdot t^3)_i \quad K := \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \left[ a \cdot \left[ \frac{a}{40} \right]^3 \right] \quad K := \frac{a^4}{64000}$$

Normerad sektoriell koordinat (*tors.2*):

$$\omega_n(s) := \int_0^s h_o(s) ds$$

Sektoriellt tröghetsmoment (*tors.5*):

$$I_\omega := \int \omega^2(s) \cdot t(s) ds \quad I_\omega := 4 \cdot \int_0^{\frac{a}{2}} \left[ \frac{a}{2} \cdot s \right]^2 \cdot \frac{a}{40} ds \quad I_\omega := \frac{1}{960} \cdot a^6$$

Bimomentet löser vi med hjälp av den homogena lösningen till "Vridningsvinkelns diff.ekvation" (*tors.14*):

$$\theta_h(x) := \theta_0 + \left[ \frac{\sinh(k \cdot x)}{k} \right] \cdot \theta'_0 + (1 - \cosh(k \cdot x)) \cdot \frac{M_{\omega 0}}{G \cdot K} + \left[ x - \frac{\sinh(k \cdot x)}{k} \right] \cdot \frac{M_{x0}}{G \cdot K}$$

$$\theta'_h(x) := \cosh(k \cdot x) \cdot \theta'_0 + (-k \cdot \sinh(k \cdot x)) \cdot \frac{M_{\omega 0}}{G \cdot K} + (1 - \cosh(k \cdot x)) \cdot \frac{M_{x0}}{G \cdot K}$$

$$\frac{M_{\omega h}(x)}{G \cdot K} := -\frac{\sinh(k \cdot x)}{k} \cdot \theta'_0 + \cosh(k \cdot x) \cdot \frac{M_{\omega 0}}{G \cdot K} + \frac{\sinh(k \cdot x)}{k} \cdot \frac{M_{x0}}{G \cdot K}$$

$$\frac{M_x(x)}{G \cdot K} := \frac{M_{x0}}{G \cdot K} \quad \text{varav} \quad \frac{M_{x2}(x)}{G \cdot K} := \frac{-\theta''''(x)}{k^2}$$

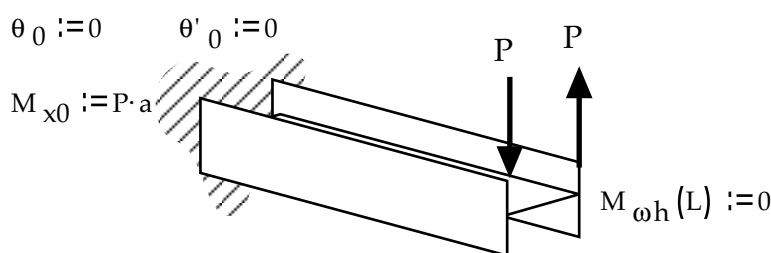
B2.11 forts:

c)

I detta fall har vi:

$$k := \sqrt{\frac{G \cdot K}{E \cdot I_{\omega}}} \quad k := \sqrt{\frac{\frac{a^4}{64000}}{2.6 \cdot \left[ \frac{1}{960} \cdot a^6 \right]}} \quad k := \frac{1}{20 \cdot a} \cdot \sqrt{\frac{6}{2.6}} \quad k := 7.5955 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{a} \quad k \cdot L := .75955$$

För att kunna bestämma bimomentet och därmed välvnormalspänningarna, utnyttjar vi fyra kända randvillkor: vid  $x=0$  är vridningen noll, välvningen noll. Vid den fria änden (inget välvningshinder) är bimomentet noll. Snitt-torsionsmomentet är konstant =  $Pa$ .



$$\frac{M_{\omega h}(L)}{G \cdot K} := -\frac{\sinh(k \cdot L)}{k} \cdot \theta'_0 + \cosh(k \cdot L) \cdot \frac{M_{\omega 0}}{G \cdot K} + \frac{\sinh(k \cdot L)}{k} \cdot \frac{M_{x0}}{G \cdot K}$$

$$0 := 0 + \cosh(k \cdot L) \cdot \frac{M_{\omega 0}}{G \cdot K} + \frac{\sinh(k \cdot L)}{k} \cdot \frac{M_{x0}}{G \cdot K}$$

$$M_{\omega 0} := -\frac{\sinh(k \cdot L)}{k \cdot \cosh(k \cdot L)} \cdot M_{x0} \quad M_{\omega 0} := -8.43673 \cdot a^2 \cdot P$$

Från vilket vi kan räkna ut spänningarna vid infästningen:

$$\sigma_x := \frac{M_{\omega 0}}{I_{\omega}} \cdot \omega_n \quad \sigma_{x \max} := \frac{-8.43673 \cdot a^2 \cdot P}{\frac{1}{960} \cdot a^6} \left[ \frac{-a^2}{4} \right] \quad \sigma_{x \max} := \frac{2025.0}{a^2} \cdot P$$

Dvs ca 84% av spänningarna vi räknade ut från balkböjningen.

Varför då lägre normalspänningar? jo därför att en del av den yttre lasten tas upp som skjuvspänningsvariation i plåtarnas tjockleksriktning. I balkböjningsfallet finns inte denna spänningsupptagning med.

Hur är det då med deformationerna (maxvridningen)?

$$\text{I balkböjningsfallet blir "vinkeln" } \theta_{\max} := \operatorname{atan} \left[ 2 \cdot \frac{\delta_{\max}}{a} \right] \quad \theta_{\max} := \operatorname{atan} \left[ \frac{320000 \cdot P}{a^2 \cdot E} \right]$$

$$\text{och i vridningsfallet } \theta_{\max} := \frac{260128 \cdot P}{a^2 \cdot E} \quad (\text{ca } 81\%)$$

B2.11 forts:

c)

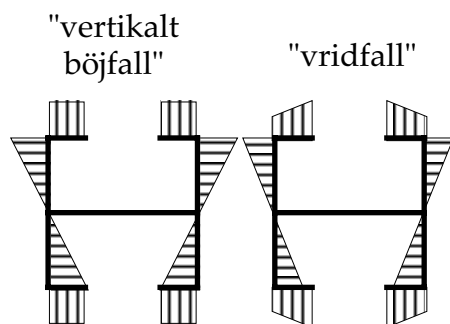
Vi kan jämföra med den vridningsvinkel vi skulle fått helt utan välvningshinder:

$$\theta_{\max} := \frac{M_x \cdot L}{G \cdot K} \qquad \theta_{\max} := \frac{P \cdot 10 \cdot a^2}{\frac{E}{2.6} \cdot \frac{a^4}{64000}} \qquad \theta_{\max} := \frac{1664000}{a^2} \cdot \frac{P}{E}$$

Den blir alltså mer än 6 ggr större !

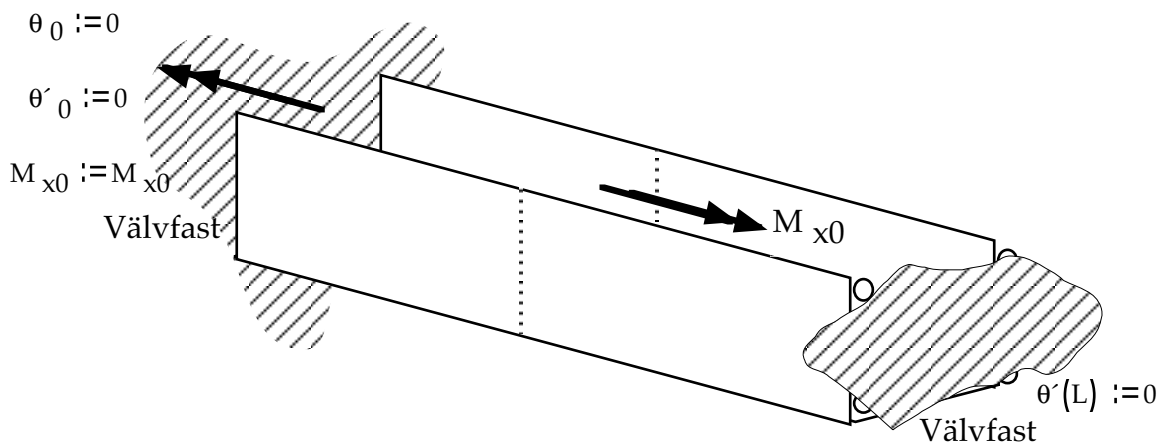
d)

Om man fortfarande betraktar sidorna som böjda i vertikalplanet kommer normalspänningarna att bli konstanta i flänsarna, medan de i vridfallet kommer att öka ut till flänsens kant ( $\omega$ -fördelningen). Detta motsvaras av den sidoböjning som uppstår i flänsplåtarna. Välvtorsion är alltså även i detta fallet lokalböjning av alla ingående plåtfält.





B2.12:



Vi bestämmer det "återstående" randvillkoret  $M_{\omega 0}$  med hjälp av randvillkoret att välvningen är noll vid  $x = L$ . Den allmänna lösningen återges av (tors.15) sid FA 2.7.13.

$$\theta'(L) := 0 \quad \text{samt} \quad \theta'(L) := \theta'_h(L) - \left[ 1 - \cosh \left[ k \cdot \left[ L - \frac{L}{2} \right] \right] \right] \cdot \frac{M_x^x}{G \cdot K} \quad \text{med}$$

$$\theta'_h(L) := \cosh(k \cdot L) \cdot \theta'_0 + (-k \cdot \sinh(k \cdot L)) \cdot \frac{M_{\omega 0}}{G \cdot K} + (1 - \cosh(k \cdot L)) \cdot \frac{M_{x0}}{G \cdot K}$$

ger det återstående randvillkoret:

$$M_{\omega 0} := -M_{x0} \cdot \frac{\left[ \cosh(k \cdot L) - \cosh \left[ \frac{1}{2} \cdot k \cdot L \right] \right]}{(k \cdot \sinh(k \cdot L))}$$

sätter vi in detta i de allmänna uttrycken (tors.15) så erhåller vi fördelningarna.

För t.ex bimomentet erhålls:

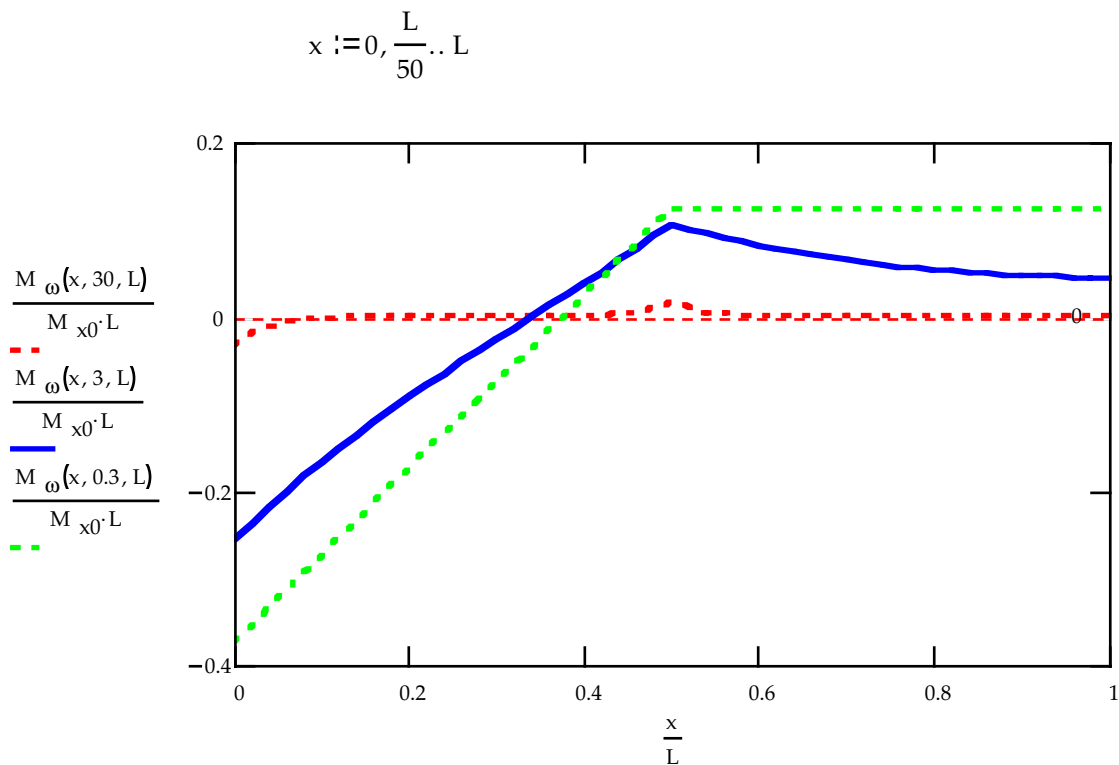
$$M_{\omega}(x, k, L) := M_{x0} \cdot \left[ \left[ -\cosh(k \cdot x) \cdot \frac{\left[ \cosh(k \cdot L) - \cosh \left[ \frac{1}{2} \cdot k \cdot L \right] \right]}{[k \cdot (\sinh(k \cdot L))]} + \frac{\sinh(k \cdot x)}{k} \right] - \text{if} \left[ x > \frac{L}{2}, \frac{\sinh \left[ k \cdot \left[ x - \frac{L}{2} \right] \right]}{k}, 0 \right] \right]$$

I figuren på följande sida visas hur bimomentet varierar längs balken för tre olika värden på  $kL$ :

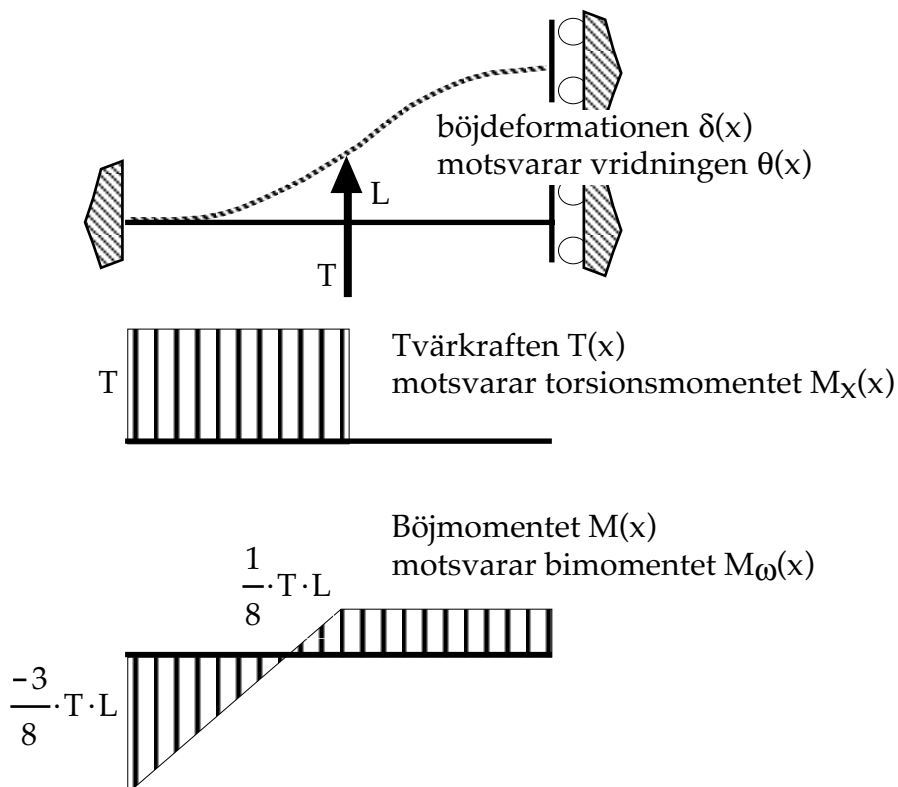
$kL = 30$  innebär i praktiken ren fri torsion (bimomentet är noll utom just vid lastpåläggningen resp vid inspänningen)

$kL = 3$  innebär blandad torsion (samma som i FA 2.7.16)

$kL = 0.3$  innebär i praktiken ren välv torsion



Om  $kL$  är litet kan vi försumma den fria torsionen och använda balkböjningsanalogi enligt FA 2.7.19. I detta fallet blir analogin ett böjfall enligt:

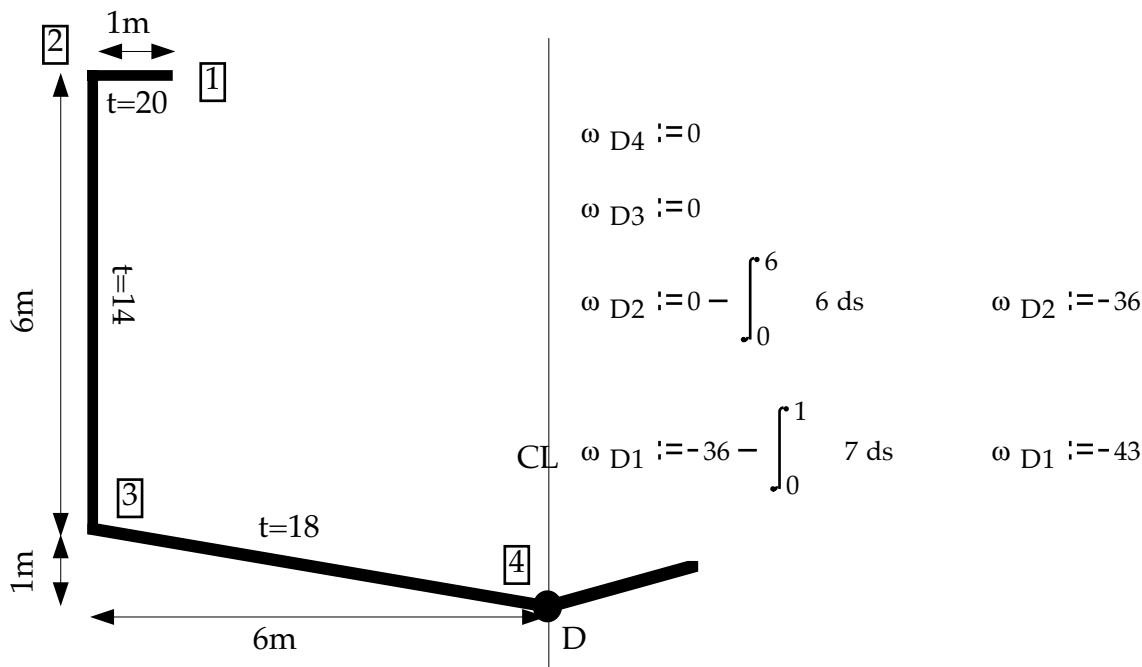


Vi känner igen momentfördelningen från plotten med  $kL=0.3$  från föregående sida!  
I just detta exempel hade vi överskattat bimomentets storlek vid infästningen med ca 40% om vi hade räknat med ren välv torsion (balkböjningsanalogi).

B2.13:

a)

Vi börjar med att räkna sektoriell koordinat (välvfunktion) med skärningen botten/CL som pol:



och motsvarande antisymmetriskt på andra sidan  
(x-axeln förutsätts gå ut ur pappret mot Dig)

Sektoriella deviationsmomentet blir:

$$\int z(s) \cdot \omega_D(s) \cdot t \, ds := 2 \cdot \left[ \int_0^6 6 \cdot (-6 \cdot s) \cdot 0.014 \, ds + \int_0^1 (6 - s) \cdot (-36 - 7 \cdot s) \cdot 0.020 \, ds \right]$$

$$\int z(s) \cdot \omega_D(s) \cdot t \, ds := -26.81066$$

Tröghetsmomentet runt y-axeln (vertikala axeln):

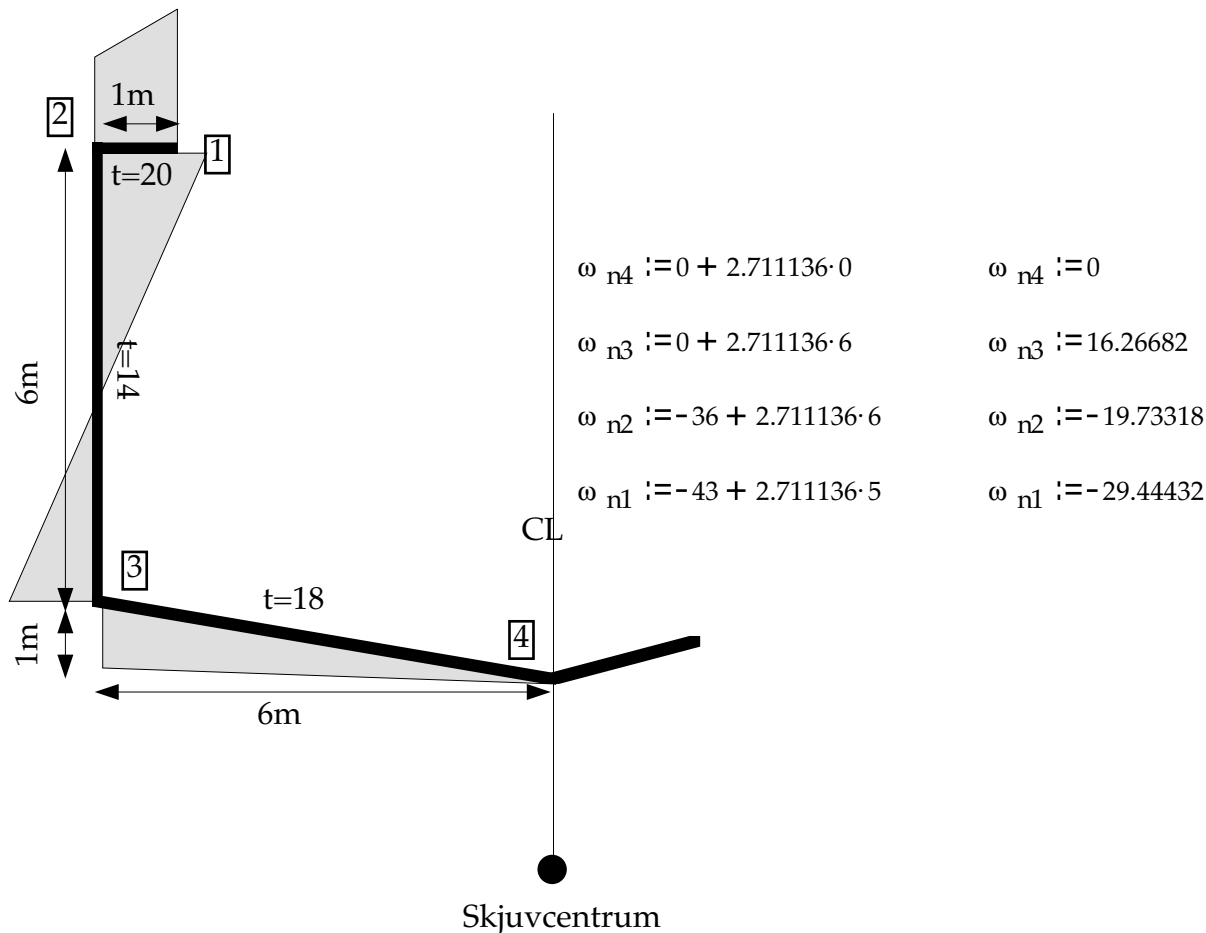
$$\int z^2 \cdot t \, ds := 2 \cdot \left[ \int_0^{\sqrt{37}} \left[ \frac{6 \cdot s}{\sqrt{37}} \right]^2 \cdot 0.018 \, ds + \int_0^6 6^2 \cdot 0.014 \, ds + \int_0^1 (6 - s)^2 \cdot 0.020 \, ds \right]$$

$$\int z^2 \cdot t \, ds := 9.889088$$

Skjuvcentrums läge under D blir  $(y_D - y_0) := -\left[ \frac{-26.81066}{9.889088} \right] \quad (y_D - y_0) := 2.711136$

B2.13 a) forts:

Den normerade sektoriella koordinaten kan nu beräknas direkt ur den tidigare fördelningen ur sambandet  $\omega_n(s) := \omega_D(s) + (y_D - y_0) \cdot z(s)$



Sektoriella tröghetsmomentet  $I_{\omega}$  blir:

$$\int \omega_n^2 \cdot t \, ds := 2 \cdot \left[ \int_0^{\sqrt{37}} \left[ \frac{16.26682}{\sqrt{37}} \cdot s \right]^2 \cdot 0.018 \, ds + \int_0^6 (16.26682 - 6 \cdot s)^2 \cdot 0.014 \, ds \dots \right]$$

$$+ \int_0^1 [-19.73318 - (7 + 2.711136) \cdot s]^2 \cdot 0.020 \, ds$$

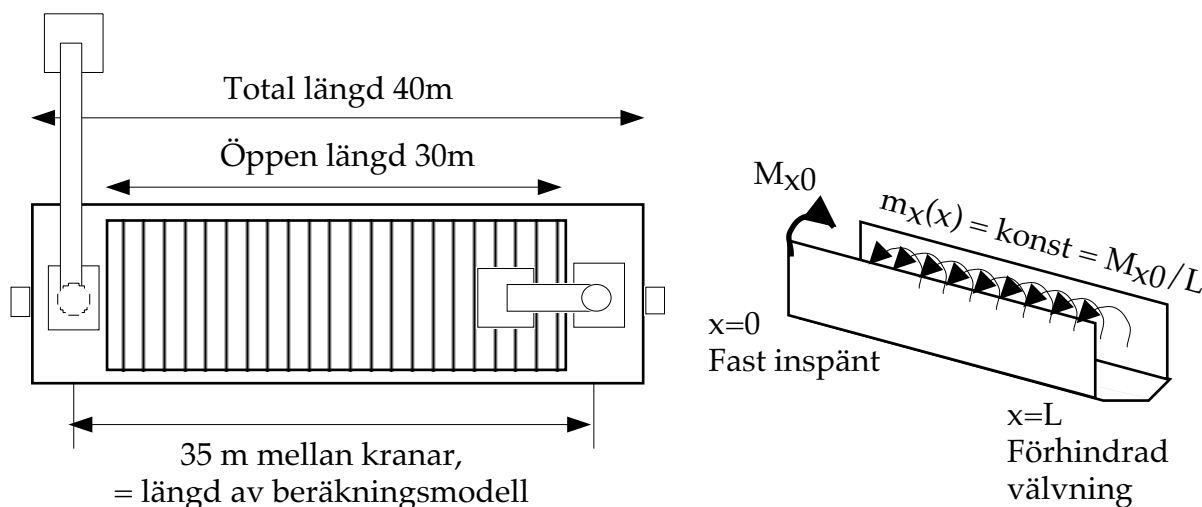
$$\int \omega_n^2 \cdot t \, ds := 62.46194$$

och slutligen vridstyvhets tvärsnittsfaktor K:

$$\frac{1}{3} \sum_i (b \cdot t^3)_i := \frac{2}{3} \left( \sqrt{37} \cdot 0.018^3 + 6 \cdot 0.014^3 + 1 \cdot 0.02^3 \right) \quad \frac{1}{3} \sum_i (b \cdot t^3)_i := 3.995911 \cdot 10^{-5}$$

B2.13 b):

Vår beräkningsmodell blir som följer:



Den fullständiga diffekvationens lösning för detta fall hittar vi som (*tors.18*), FA 2.7.14

Vid  $x=0$  är bimomentet  $M_{\omega 0}$  okänt, men vi kan lösa ut det genom det kända randvillkoret  $\theta'(L) = 0$  precis på samma sätt som i tidigare uppgifter. Här väljer jag istället direkt balkanalogi. Förutsättningarna för denna är helt uppfyllda eftersom det föreligger vältvningshinder och eftersom  $kL$  är litet:

$$k \cdot L := \sqrt{\frac{G \cdot K}{E \cdot I_{\omega}}} \cdot L \quad k \cdot L := \sqrt{\frac{3.995911 \cdot 10^{-5}}{2.6 \cdot 62.46194}} \cdot 35 \quad k \cdot L := 0.01736$$

Figuren på nästa sida visar balkböjningsfallet som motsvarar torsionsfallet ovan.

precis som maxböjspänningarna blir  $\sigma_{\max} := \frac{M_{\max}}{I} \cdot y_{\max}$  blir maximala

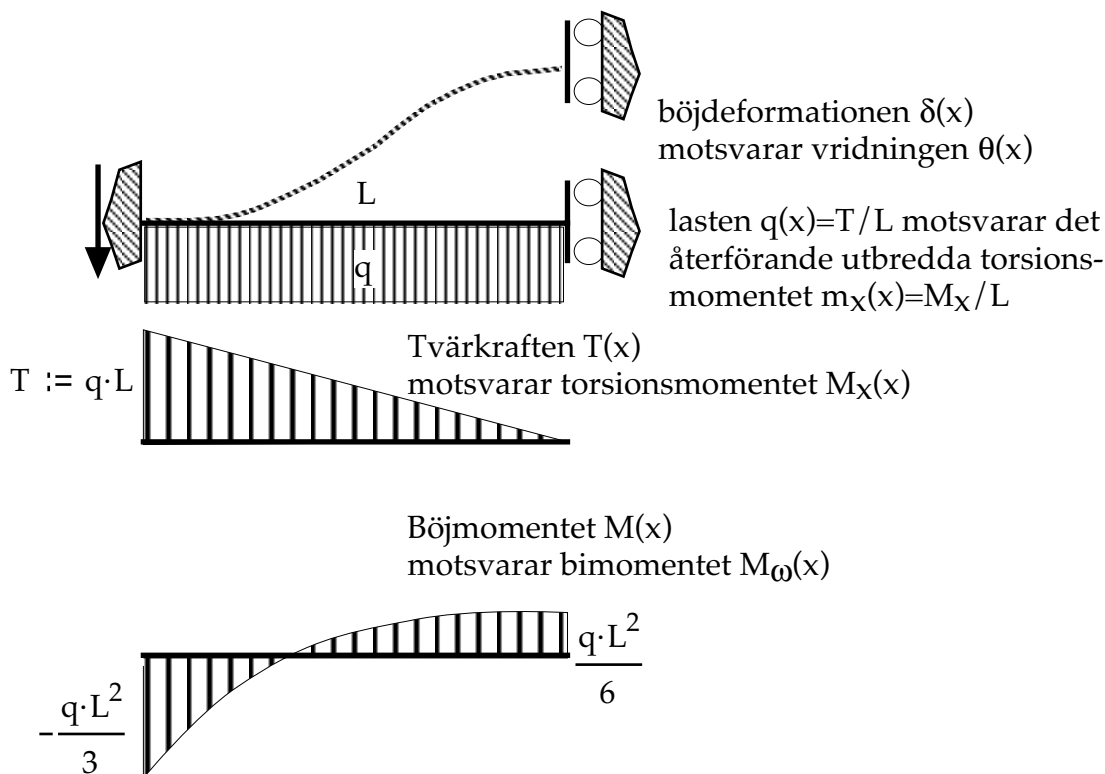
vältvnormalspänningar:  $\sigma_{\max} := \frac{M_{\omega \max}}{I_{\omega}} \cdot \omega_{\max}$

$$\sigma_{\max} := \frac{\left[ \frac{M_x \cdot L}{3} \right]}{I_{\omega}} \cdot \omega_{\max} \quad \sigma_{\max} := \frac{\left[ \frac{20 \cdot 1000 \cdot 9.81 \cdot 20 \cdot 35}{3} \right]}{62.46194} \cdot 29.44432 \quad \sigma_{\max} := 2.158052 \cdot 10^7$$

dvs ca 22 MPa, OK!

(i själva verket är spänningarna ännu lägre vid tvärdäckens början, den verkliga öppna delen av pråmen är ju bara 30 m)

B2.13 b) forts:



Deformationerna kan vi för balkböjningsfallet hämta ur elementarfallstabell:

$$\delta_{\max} := \frac{q (2 \cdot L)^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

$$\delta_{\max} := \frac{1}{24} \cdot \frac{q L^4}{E \cdot I}$$

$$\theta_{\max} := \frac{1}{24} \cdot \frac{M_x \cdot L^3}{E \cdot I \cdot \omega}$$

$$\theta_{\max} := \frac{1}{24} \cdot \frac{20 \cdot 1000 \cdot 9.81 \cdot 20 \cdot 35^3}{2.1 \cdot 10^{11} \cdot 62.46194}$$

$$\theta_{\max} := 5.344255 \cdot 10^{-4}$$

dvs ca 6mm höjdskillnad mellan sidodäcken (obetydligt).

c)

Om det inte föreligger något välvningshinder, kan vi inte använda balkböjningsanalogin.

Kända randvillkor är nu att bimomentet är noll i bägge (välvfria) ändarna, medan välvningen,  $\theta'$ ,

är okänd. Ur (tors.18) kan vi lösa ut att  $\theta' \cdot 0$  blir i storleksordningen  $\frac{M_{x0}}{2 \cdot G \cdot K}$

vilket medför att vridningen kommer att bli flera varv! Det är alltså långt utanför (den linjära elastiska) teorins giltighet!!

B2.13 c) forts:

För att kunna lösa d) behöver vi ta fram uttrycken för fallet med helt välvfria ändar (även om detta resultat i sig är utanför teorins giltighet). Index Q markerar här att det handlar om snittstorheter pga yttre last.

$$M_{\omega Q}(L) := 0 \quad \text{ger} \quad \theta_Q := \left[ \frac{M_{\omega Q h}(L)}{G \cdot K} + \left[ \frac{1 - \cosh[k \cdot (L - 0)]}{k^2} \right] \cdot \frac{m_x}{G \cdot K} \right] \quad \text{med}$$

$$\frac{M_{\omega Q h}(L)}{G \cdot K} := -\frac{\sinh(k \cdot L)}{k} \cdot \theta'_{Q0} + 0 + \frac{\sinh(k \cdot L)}{k} \cdot \frac{M_{x0}}{G \cdot K}$$

ger med  $m_x = M_{x0}/L$  och  $kL=0.01736$ :

$$\theta'_{Q0} := \frac{M_{x0}}{G \cdot K} \left[ \frac{\sinh(k \cdot L)}{k} + \frac{1 - \cosh(k \cdot L)}{k^2 \cdot L} \right] \cdot \frac{k}{\sinh(k \cdot L)} \quad \frac{\theta'_{Q0}}{\left[ \frac{M_{x0}}{G \cdot K} \right]} = 0.50001 \quad \theta'_{Q0} = 0.60792$$

den allmänna lösningen för vridningsvinkeln blir:

$$\theta_Q(x) := \frac{\sinh(k \cdot x)}{k} \cdot \theta'_{Q0} + \left[ x - \frac{\sinh(k \cdot x)}{k} \right] \cdot \frac{M_{x0}}{G \cdot K} - \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{1 - \cosh(k \cdot x)}{k^2} \right] \cdot \frac{M_{x0}}{L \cdot G \cdot K}$$

$$\theta_Q(x) := \frac{M_{x0}}{G \cdot K} \left[ \frac{\sinh(k \cdot x)}{k} \left[ 1 + \frac{1 - \cosh(k \cdot L)}{k \cdot L \cdot \sinh(k \cdot L)} \right] + \left[ x - \frac{\sinh(k \cdot x)}{k} \right] - \left[ \frac{x^2}{2 \cdot L} + \frac{1 - \cosh(k \cdot x)}{k^2 \cdot L} \right] \right]$$

$$\frac{\theta_Q(L)}{\left[ \frac{M_{x0} \cdot L}{G \cdot K} \right]} = 0.5 \quad \theta_Q(L) = 21.27655$$

Förvridningen blir alltså (rent teoretiskt men helt orimligt!) 21.3 rad = 3.4 varv!

För vridningsvinkelns derivata och för bimomentet erhålls :

$$\theta'_Q(x) := \frac{M_{x0}}{G \cdot K} \left[ \cosh(k \cdot x) \cdot \left[ 1 + \frac{(1 - \cosh(k \cdot L))}{(k \cdot L \cdot \sinh(k \cdot L))} \right] + 1 - \cosh(k \cdot x) - \left[ \frac{x}{L} - \frac{\sinh(k \cdot x)}{k \cdot L} \right] \right]$$

$$\frac{\theta'_Q(L)}{\left[ \frac{M_{x0}}{G \cdot K} \right]} = 0.49999 \quad \theta'_Q(L) = 0.60789$$

$$M_{\omega Q}(x) := \frac{-M_{x0}}{k^2} \left[ \sinh(k \cdot x) \cdot k \cdot \left[ 1 + \frac{(1 - \cosh(k \cdot L))}{[k \cdot (L \cdot \sinh(k \cdot L))]} \right] - \sinh(k \cdot x) \cdot k - \frac{1}{L} + \frac{\cosh(k \cdot x)}{L} \right]$$

Välvningen i det närmaste konstant längs med pråmen, (maxvärde 18 m !! i däcksidan)  
Bimomentet har maxvärde ungefär mitt på pråmens längd. (I slutet på uppgiften visas fördelningarna).

B2.13 d) :

Den totala välvningen vid tvärdäcken kan skrivas som summan av välvning pga yttre last (beräknad enligt ovan) och välvning pga återförande bimoment till följd av däckstrimlornas styvhet.

I bägge fallen antas sektionen vara snittad i CL dvs öppen utan välvningshinder.

Snittkrafterna i tvärstrimlan P, är i sin tur en följd av den totala välvningen. Ur dessa bägge förhållanden kan snittkrafternas storlek som funktion av yttre last bestämmas och därmed också det övriga deformationstillståndet. Lösningsprincipen finns återgiven i FA 2.7.24-29.

1) Välvning som funktion av yttre last har vi redan räknat ut i c),

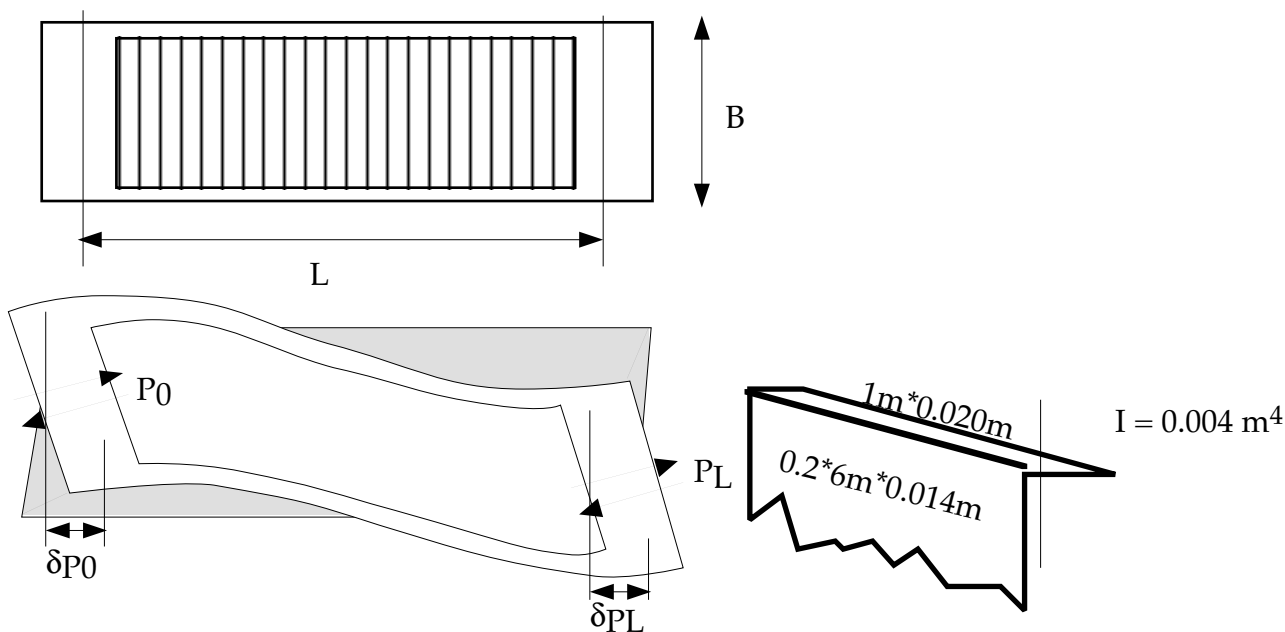
$$A := 12 \cdot 6.5$$

$$\delta_Q(x) := \theta' Q(x) \cdot 2 \cdot A \quad \delta_Q(0) = 94.83499 \quad \delta_Q(L) = 94.83023$$

dvs praktiskt taget konstant välvning (men naturligtvis orealistiskt stor!)

2) Återförande tvärkrafter P som funktion av välvningen:

Eftersom sidodäcken rimligen är mycket vekare än tvärdäcket räknar jag endast med deras styvhetsbidrag.



För långskepps däckstrimlorna får vi sambandet mellan tvärkrafter och förskjutningar med

försummad skjuvdeformation ungefär:  $\delta := \frac{P \cdot B^2 \cdot L}{12 \cdot E \cdot I}$ . där I beräknas för en sektion enligt skissen

$$\text{ovan. } \delta := \frac{P \cdot 12^2 \cdot 35}{12 \cdot E \cdot 0.004} \quad \delta := 5 \cdot 10^{-7} \cdot P$$



B2.13 d) forts:

3) Snittkrafterna  $P_0$  och  $P_L$  ger upphov till varsitt motverkande bimoment  $P_i \cdot 2 \cdot A$

Välvdeformationen pga dessa bimoment erhåller vi ur homogena lösningen med

randvillkoren:  $\theta_{P_0} := 0$   $M_{\omega P_0} := -P_0 \cdot 2 \cdot A$   $M_{x P_0} := 0$   $M_{\omega P}(L) := P_L \cdot 2 \cdot A$

$$\theta'_{P_0} := \frac{2 \cdot A}{G \cdot K} \left[ \frac{k \cdot \cosh(k \cdot L)}{\sinh(k \cdot L)} \cdot (-P_0) - \frac{k}{\sinh(k \cdot L)} \cdot P_L \right]$$

$$\theta'_{P}(x) := \frac{2 \cdot A}{G \cdot K} \left[ \left[ \frac{\cosh(k \cdot x) \cdot k \cdot \cosh(k \cdot L)}{\sinh(k \cdot L)} - k \cdot \sinh(k \cdot x) \right] \cdot (-P_0) - \frac{\cosh(k \cdot x) \cdot k}{\sinh(k \cdot L)} \cdot P_L \right]$$

$$\delta_P(x) := 2 \cdot A \cdot \theta'_P(x)$$

ger

$$\delta_P(0) := -2.15456 \cdot 10^{-4} \cdot P_0 - 2.15424 \cdot 10^{-4} \cdot P_L \quad \delta_P(L) := -2.15424 \cdot 10^{-4} \cdot P_0 - 2.15456 \cdot 10^{-4} \cdot P_L$$

Vi har nu tillräcklig information för att lösa ut snittkrafterna P:

$$\delta_Q(0) + \delta_P(0) := \delta_{tot}(0)$$

$$\delta_Q(L) + \delta_P(L) := \delta_{tot}(L)$$

Given

$$94.83396 + \left( -2.15456 \cdot 10^{-4} \cdot P_0 - 2.15424 \cdot 10^{-4} \cdot P_L \right) - 5 \cdot 10^{-7} \cdot P_0 = 0$$

$$94.83084 + \left( -2.15424 \cdot 10^{-4} \cdot P_0 - 2.15456 \cdot 10^{-4} \cdot P_L \right) - 5 \cdot 10^{-7} \cdot P_L = 0$$

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_L \end{bmatrix} := \text{Find}(P_0, P_L) \quad P_0 = 2.22767 \cdot 10^5 \quad P_L = 2.16903 \cdot 10^5$$

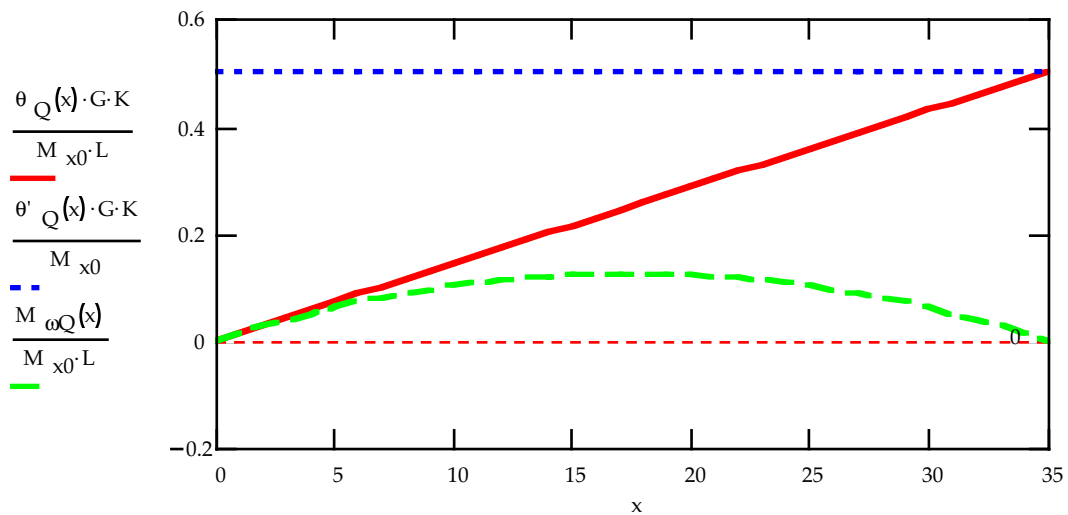
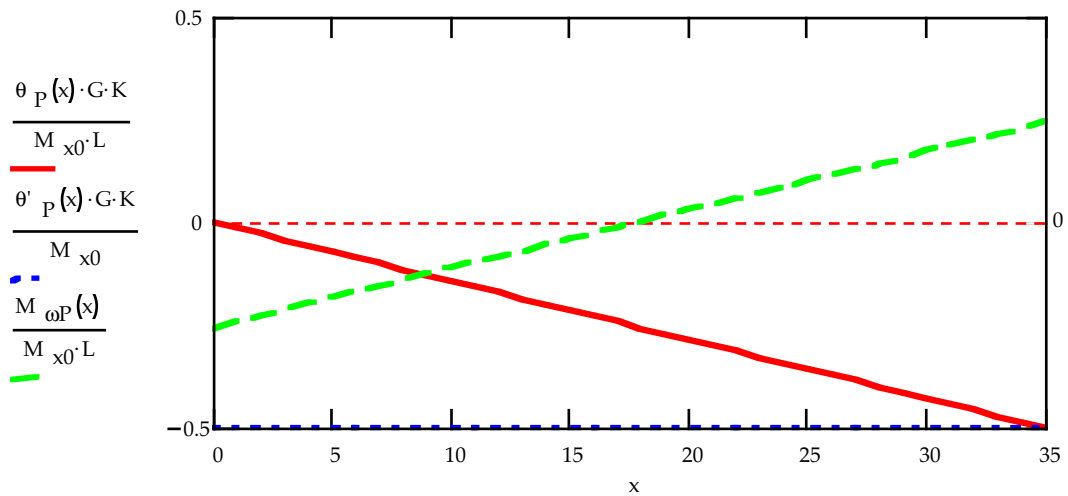
Vridning och välvnormalspänning erhåller vi nu genom att superponera de båda belastningsfallen (yttre last och återförande bimoment) med kända  $P_0$  och  $P_L$ . Resultatet visas i diagrammen på nästa sida. Observera att de totala snittstorheterna för vridning och välvning är skillnaden mellan två nästan lika (mycket!) stora tal. Man behöver därför ha ganska hög precision på beräkningarna.

Maxvridningen blir  $1.4^\circ$  vilket alltså är väsentligt mycket mera än när vi antog helt välvfast inspänning. Skillnaden i däckshöjd ökar från 6 mm till 30 cm

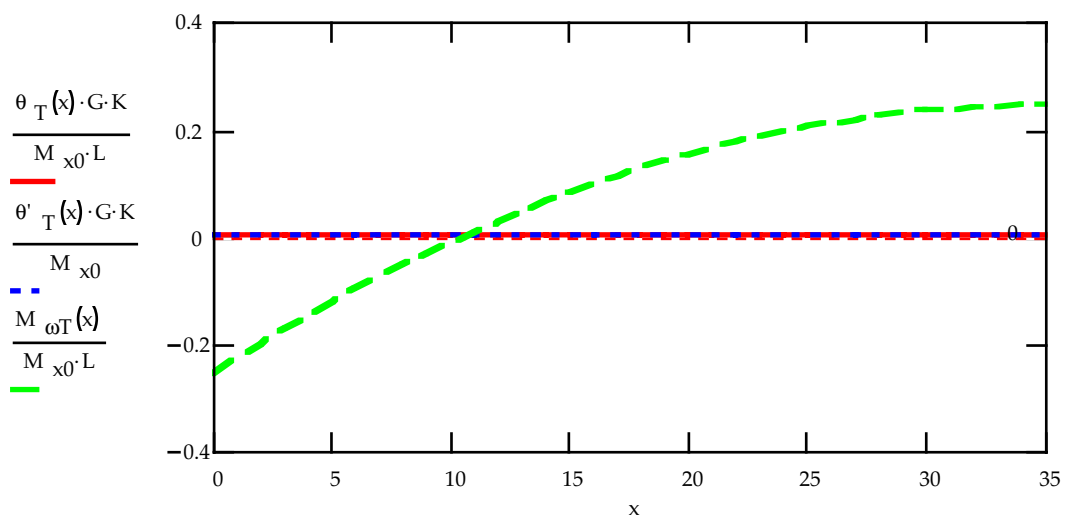
Välvspänningarna minskar från 22 MPa till 16.5 MPa och blir nu ungefär lika stora vid båda ändarna av pråmen.

(Kommentar: Vi behöver öka däckens styvhet med ca 100 ggr för att få i det närmaste samma resultat som för antagandet välvfast inspänning)

B2.13 d) forts:



$$\theta_T(x) := \theta_P(x) + \theta_Q(x) \quad \theta'_T(x) := \theta'_P(x) + \theta'_Q(x) \quad M_{\omega T}(x) := M_{\omega P}(x) + M_{\omega Q}(x)$$



$$\theta_T(L) = 0.0252 \quad \theta'_T(0) = 7.19174 \cdot 10^{-4} \quad M_{\omega T}(0) = -3.49928 \cdot 10^7 \quad \sigma = 1.64955 \cdot 10^7$$

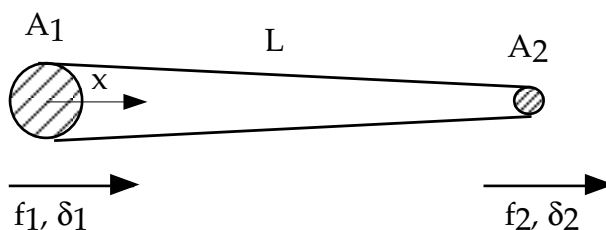
## Finite Element Metod; Uppgifter

B3.1

Angående elementformulering:

I FA 3.1.8-9 härleds fullständigt elementegenskaperna för en 2-noders stång med konstant tvärsnitt  $A$  och antaget linjär förskjutning  $u(x) = C_1 + C_2 x$ .

- a) Härled på motsvarande sätt elementstyvhetsmatrisen  $k$  för en 2-noders stång med antaget linjär förskjutning  $u(x)$ , men med även linjärt varierande tvärsnitt  $A(x) = A_1 + (A_2 - A_1)x/L$ .



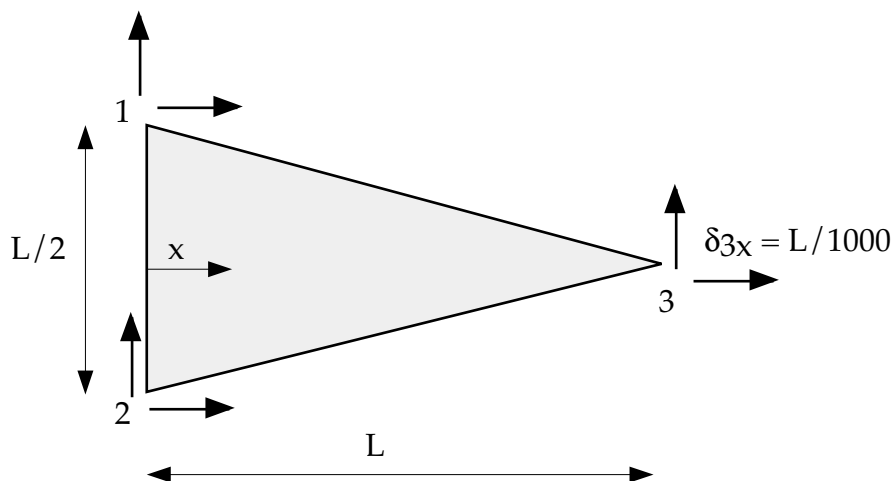
- b) Härled på motsvarande sätt elementstyvhetsmatrisen  $k$  för samma 2-noders stång med linjärt varierande tvärsnitt  $A(x)$  enligt a), men istället med antaget kvadratisk förskjutning  $u(x) = C_1 + C_2 x^2$ .
- c) Antag nodförskjutningar  $\delta_1 = 0$  och  $\delta_2 = L/1000$ , Bestäm spänningsfördelningen längs stången med formulering enligt a) resp. b) samt med analytisk lösning genom ren jämviktsbetraktelse för följande två geometrier:

$$A_2 = A_1 \text{ (konstant tvärsnittsarea) och } A_2 = 0 \text{ (spetsig stång)}$$

$$\text{Antag vanligt konstruktionsstål med } E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

B3.2

Bestäm spänningstillståndet i ett CST-element under liknande villkor som i uppgift B1 c) ovan och jämför resultaten:



Antag alla nodförskjutningar = 0 utom  $\delta_{3x} = L/1000$  enligt figuren. OBS att spänningarna kan beräknas direkt enligt SSD ekv (7.3.19)!

## FEM; Förslag till lösningar

B3.1 a):

Eftersom elementet har samma förskjutningsansats blir den enda skillnaden mot ett "vanligt" stånelement att man får integrera fram styvhetsrelationen över en varierande tvärsnittsarea  
 $dV = A(x)dx$

$$\mathbf{f} := \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot E \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \cdot \left[ A_1 + (A_2 - A_1) \cdot \frac{x}{L} \right] dx$$

$$\mathbf{f} := \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A_1 + A_2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

B3.1 b):

Den fullständiga härledningen för en "kvadratisk" ansats blir som följer:

$$u(x) := C_1 + C_2 \cdot x^2 \quad \mathbf{u} := \begin{bmatrix} 1 & x^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} := \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}$$

$$\delta_1 := C_1 \quad \delta_2 := C_1 + C_2 \cdot L^2 \quad \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\delta} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} := \mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta}$$

$$\mathbf{u} := \mathbf{H} \cdot \mathbf{C} \quad \mathbf{u} := \mathbf{H} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta} \quad \mathbf{u} := \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta} \quad \mathbf{N} := \begin{bmatrix} 1 & x^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} := \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^2}{L^2} & \frac{x^2}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \left[ \frac{d}{dx} \mathbf{u} \right] = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^2}{L^2} & \frac{x^2}{L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2 \cdot x}{L^2} & \frac{2 \cdot x}{L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} := \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta} \quad \boldsymbol{\sigma} := E \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{f} := \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta} dV \quad \mathbf{f} := \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{-2 \cdot x}{L^2} \\ \frac{2 \cdot x}{L^2} \end{bmatrix} \cdot E \cdot \begin{bmatrix} \frac{-2 \cdot x}{L^2} & \frac{2 \cdot x}{L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \cdot \left[ A_1 + (A_2 - A_1) \cdot \frac{x}{L} \right] dx$$

$$\mathbf{f} := \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A_1 + 3 \cdot A_2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

B3.1 c):

Spänningen för en fix förskjutning är oberoende av areafördelningarna, för de bägge alternativen a) resp b) erhålles:

$$A_2 := A_1 \quad \text{sam} \quad A_2 := 0$$

$$\sigma_a(x) := E \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ L \\ 1000 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_a(x) := \frac{1}{1000} E$$

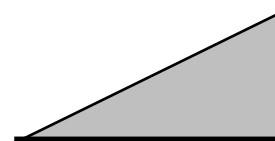
$$\sigma_a(x) := 2.1 \cdot 10^8$$



$$\sigma_b(x) := E \cdot \begin{bmatrix} -2 \cdot x & 2 \cdot x \\ L^2 & L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ L \\ 1000 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_b(x) := \frac{1}{500} \cdot \frac{x}{L} E$$

$$\sigma_b(x) := 4.2 \cdot 10^8 \cdot \frac{x}{L}$$



Observerva alltså att spänningen alltid är noll i nod 1 för den "kvadratiska" ansatsen, (inte så bra kanske). För fallet  $A_2 = A_1$  stämmer den "analytiska" lösningen med alt. a) För fallet  $A_2 = 0$  finns ingen "analytisk" spänningslösning.

Om vi istället ansätter en fix kraft  $f_2$  med låst  $d_1 = 0$  får vi följande förskjutningar:

$$A_2 := A_1$$

$$A_2 := 0$$

$$\delta_{2a} := \frac{A_1 \cdot L}{E} f_2$$

$$\delta_{2b} := \frac{3}{4} \frac{A_1 \cdot L}{E} f_2$$

$$\delta_{2a} := 2 \cdot \frac{A_1 \cdot L}{E} f_2$$

$$\delta_{2b} := 3 \cdot \frac{A_1 \cdot L}{E} f_2$$

Vi ser at alternativ b) är styvare i det första fallet men vekare än a) i det andra fallet.

B3.2:

Ur SSD 7.3.19 erhåller vi direkt spänningarna:

$$\sigma_x := \frac{E}{2 \cdot A_{123} \cdot (1 - \nu^2)} y_{12} u_3 \quad \sigma_x := \frac{E}{2 \cdot \frac{L^2}{4} \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{1000}$$

$$\sigma_x := \frac{1}{1000} \cdot \frac{E}{(1 - \nu^2)} \quad \sigma_y := \frac{1}{1000} \cdot \frac{E \cdot \nu}{(1 - \nu^2)} \quad \tau := 0$$

$$\sigma_x = 2.308 \cdot 10^8$$

$$\sigma_y = 6.923 \cdot 10^7$$

spänningarna är konstanta i hela elementet.

## Buckling; Uppgifter

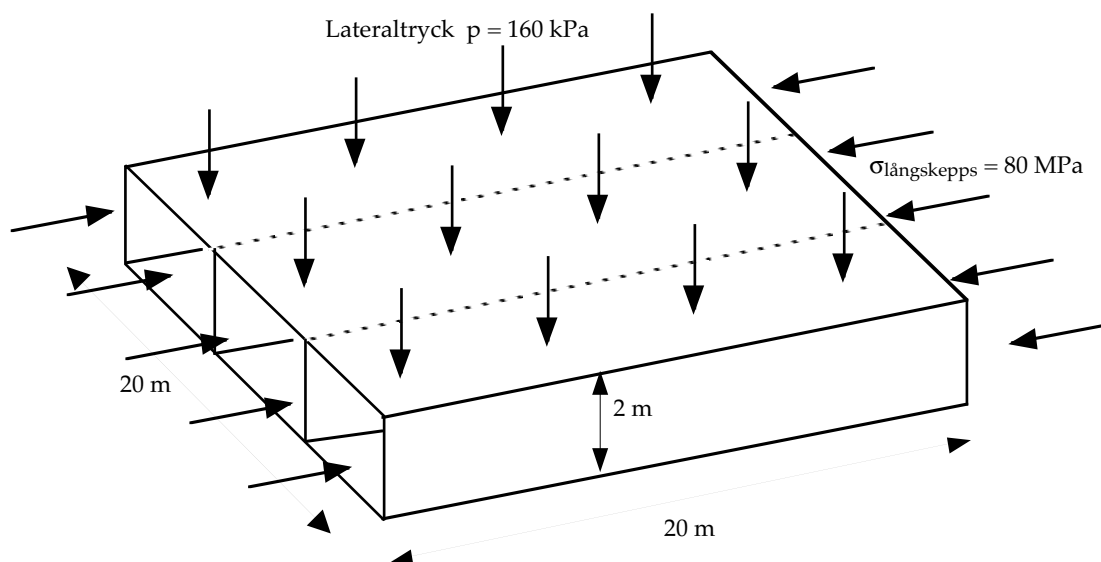
### B4.1

Betrakta en kombinerat lateral och axialbelastad dubbelbottenpanel i ett fartyg med enbart vägare i längskeppsriktningen (inga förstävningar för övrigt i detta principexempel).

Försök oberoende av klassreglernas minimikrav, för "hand" minimera panelens stålvikt genom att variera plåttjocklekar, antal livplåtar och livtjocklekar.

Denna uppgift kan bli ett mycket komplicerat optimeringsproblem med flera bivillkor. Försök mera med resonemang och enkla kontrollräkningar se vartåt det barkar om man t ex ökar antalet liv eller dylikt. Antag (för att göra exemplet lite enklare) fritt upplagda ränder vid tvärskeppskotten, gör för övrigt de förenklingar som kan vara motiverat. Du bör beakta följande krav:

- Panelen skall bibehållas helt symmetrisk (lateraltrycket kan komma från endera sidan)
- Hela panelen utförd i vanligt fartygsstål med  $\sigma_y = 240$  MPa
- Kombinerade membranspänningar i längskeppsriktningen, max 180 MPa
- Lokala böjspänningar i lateralbelastade plåtar max 180 MPa i tvärskeppsled.
- Skjuvspänningar i livplåtar max 90 MPa
- Ingen buckling får förekomma i vare sig liv eller plåtar/flänsar



### B4.2

I DNVs klassregler finns angivet att en bricka skall ha fläns om den fria längden är mera än 40 ggr brickans plåttjocklek. Använd uttrycket för kritisk knäckningsspänning för en fri plåt"stötta" och försök "förstå" DNVs krav.

## Buckling; Förslag till lösningar

### B4.1

#### Definitioner:

Antag att vi använder  $q$  st livplåtar mellan sidorna. Avståndet mellan livplåtarna, tillika lastbärande bredd vid lateraltryck, blir då  $b = 20/(q+1)$ ;

Plåttjockleken kallar vi  $t_p$  och livplåtens tjocklek  $t_w$ .

Totala stålvolymen per längdenhet (mellan sidorna) blir då  $40t_p + 2qt_w$ , vilken vi alltså ska försöka minimera.

Vi börjar med att titta på de olika kriterierna var för sig.

#### Böjbelastning av vägarna till följd av lateraltrycket:

Enligt uppgiften kan vi anta fritt upplagda ändpunkter av vägarna. Momentmax under lateraltrycket  $p$  uppträder då på mitten av vägaren och max skjuvspänningar vid ändarna. Plåttjockleken dimensioneras mot böjnormalspänningar max  $180 - 80 = 100$  MPa och livtjockleken mot skjuvspänningar max 90 MPa.

Vi antar först att vi har tillräckligt många liv så att plåtflänsen är ca 100% effektiv i böjning. Vi har följande villkor som (minst) skall vara uppfyllda samtidigt

$$p := 160 \cdot 10^3 \quad L := 20$$

$$M_{\max}(b) := \frac{p \cdot b \cdot L^2}{8} = 8 \cdot 10^6 \cdot b$$

$$T_{\max}(b) := \frac{p \cdot b \cdot L}{2} = 1.6 \cdot 10^6 \cdot b$$

$$W(b, t_p, t_w) := 2 \cdot t_p \cdot b \cdot L^2 + \frac{2^3 \cdot t_w}{12} = 2 \cdot b \cdot t_p + \frac{2}{3} \cdot t_w$$

$$A_{\text{liv}}(t_w) := 2 \cdot t_w$$

$$\sigma_b(b, t_p, t_w) := \frac{M_{\max}(b)}{W(b, t_p, t_w)} = 100 \cdot 10^6$$

$$\tau(b, t_w) := \frac{T_{\max}(b)}{A_{\text{liv}}(t_w)} = 90 \cdot 10^6$$

Eftersom tjockleken på livet är mindre effektiv för böjmotståndet

(åtminstone så länge  $b > 1/3$  m!), låter vi livet dimensioneras av skjuvspänningarna.

de högra sambanden ger  $t_w(b) := \frac{1.6 \cdot b}{2 \cdot 90}$  vilket insatt i uttrycket för böjspänningar ger

$$t_p(b) := \frac{1}{2} \left[ \frac{8}{100} - \frac{2 \cdot 1.6}{3 \cdot 2 \cdot 90} \right] = 0.03704 \quad \text{dvs } 37 \text{ mm oavsett delningen } b!$$

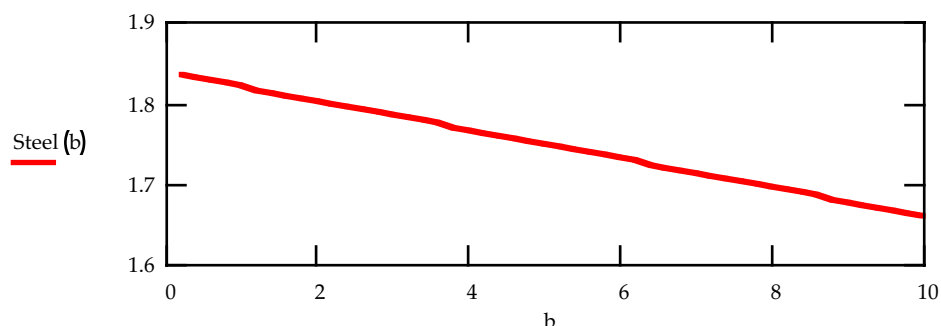
Erforderlig stålvolym som funktion av  $b$  blir  $\text{Steel}(b) := 40 \cdot t_p(b) + 2 \cdot \left[ \frac{20}{b} - 1 \right] \cdot t_w(b)$

Med hänsyn enbart till vägarböjning/skjuvning minskar vikten något med ökad bredd, se figur på nästa sida. I realiteten skulle dock effektiviteten på flänsarna börja minska märkbart om  $b$  ökar över  $0.2 L$ , För endast en centervägare ( $b=10$ ) är plåteffektiviteten bara ca 70% (diagram IIIb FA 2.2.19)

B4.1 forts:

Utan hänsyn till effektiv fläns:

$$b := 0.2, 0.4.. 10$$

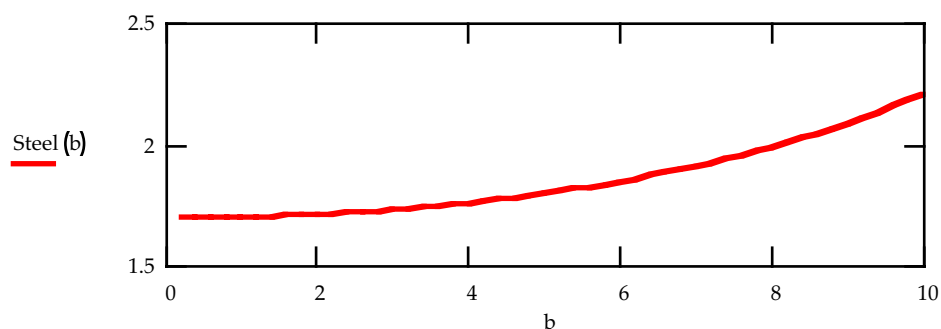


Med hänsyn till effektiv fläns kan vi förenklat skriva effektiviteten som  $(1.1 - 0.0117 \cdot b^{1.5})$   
Vi erhåller på motsvarande sätt som tidigare:

$$t_p(b) := \frac{1}{2 \cdot (1.1 - 0.0117 \cdot b^{1.5})} \cdot \left[ \frac{8}{100} - \frac{2 \cdot 1.6}{3 \cdot 2 \cdot 90} \right] \quad t_p(b) := \frac{0.03704}{1.1 - 0.0117 \cdot b^{1.5}}$$

$$\text{Steel}(b) := 40 \cdot t_p(b) + 2 \cdot \left[ \frac{20}{b} - 1 \right] \cdot t_w(b)$$

$$b := 0.2, 0.4.. 10$$



I detta fall ser vi att mängden stål istället succesivt ökar med ökande b.

Plåtböjning:

För  $L/b \geq 2$  blir maximal plåtböjspänning:  $\sigma_{pb} := \frac{1}{2} \cdot p \cdot \left[ \frac{b}{t_p} \right]^2$  (se t ex SSD Figure 9.6 sid 338)

vilket under villkoret att spänningen  $\leq 180$  MPa ger följande krav på plåttjockleken:

$$t_p(b) := \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{160 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^6}} \cdot b = 0.02108 \cdot b$$

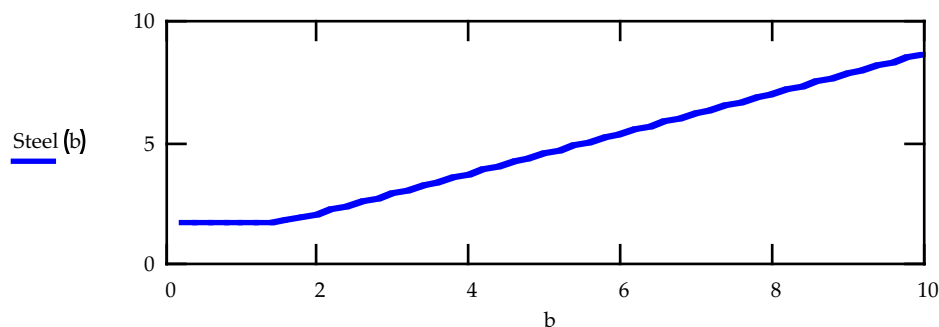


B.4.1 forts:

Kombinerat med det tidigare villkoret har vi nu:

$$t_p(b) := \max \left[ \left[ \frac{0.03704}{1.1 - 0.0117 \cdot b^{1.5}} \right], \left[ \frac{0.02108 \cdot b}{1} \right] \right] \quad \text{Steel}(b) := 40 \cdot t_p(b) + 2 \cdot \left[ \frac{20}{b} - 1 \right] \cdot t_w(b)$$

b := 0.2, 0.4.. 10.0



med hänsyn till plåtböjning lönar det sig alltså inte att öka bredden mer än till ca 1.8 m (dvs 10 vägare).

**Buckling:**

Vi skall kontrollera både plåt och livbuckling. Maxspänning i båda fallen 180 MPa – axiellt tryck i plåten och maxvärde vid linjärt varierande tryck pga av kombinerade böj- och normalspänningar i livet. Eftersom 180 MPa ligger över "proportionalitetsgränsen" dvs  $\sigma_y/2$ , gör vi om detta till en motsvarande elastisk kritisk bucklingsspänning. Enligt "Johnson Parabola", (SSD Figure 11.5 sid 393, eller FA 4.1.5) motsvarar 180 MPa verklig kritisk spänning ( $\sigma_{ult}$ ) en elastisk kritisk spänning ( $\sigma_E$ ) på 240 MPa.

För plåtbuckling har vi följande samband

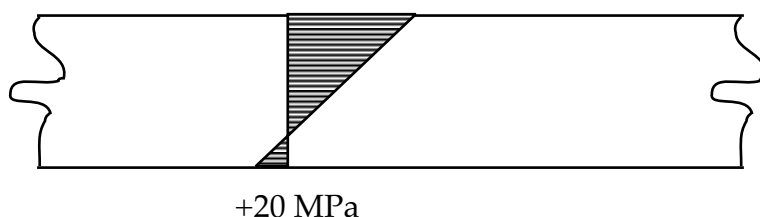
$$\sigma_{acr} := k \cdot \frac{\pi^2 \cdot D}{b^2 \cdot t} \quad \text{eller kanske enklare enligt "design formula" } \sigma_{acr} := 0.90 \cdot k \cdot E \cdot \left[ \frac{t}{b} \right]^2$$

för plåten har vi k = 4, vilket ger:

$$t_p(b) := \sqrt{\frac{240 \cdot 10^6}{0.90 \cdot 4 \cdot 2.1 \cdot 10^{11}}} \cdot b = 0.01782 \cdot b$$

för livet (mitt emellan skotten) har vi skjuvspänningen noll och en normalspännings-fördelning -180 MPa

enligt



B4.1 forts:

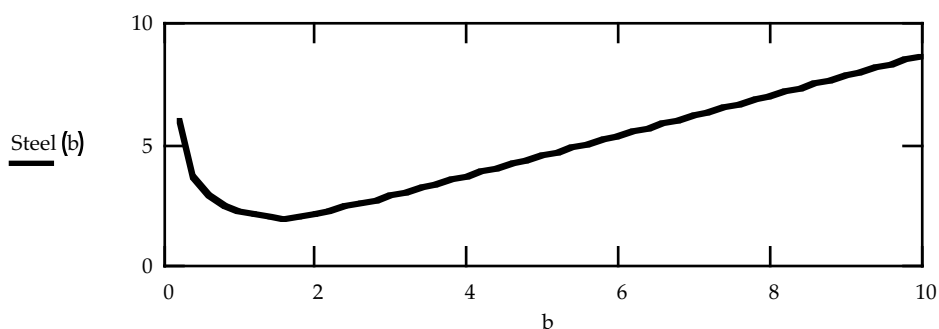
En approximativ bucklingskoefficient kan vi erhålla från SSD sid 415 (eller FA 4.2.4)

$$k_b := 5 \cdot \phi^2 + 4 \quad \phi := 1 + \frac{20}{180} \quad k_b := 10.2$$

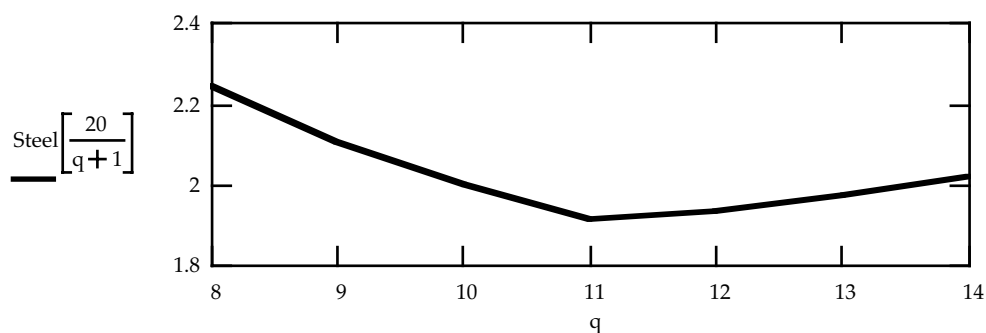
$$t_w(b) := \sqrt{\frac{240 \cdot 10^6}{0.90 \cdot 10.2 \cdot 2.1 \cdot 10^{11}}} \cdot 2 = 0.02315 \quad \text{dvs } 23 \text{ mm (oberoende av delningen).}$$

$$t_p(b) := \max \left[ \begin{array}{l} \frac{0.03704}{1.1 - 0.0117 \cdot b^{1.5}} \\ 0.02108 \cdot b \\ 0.01782 \cdot b \end{array} \right] \quad t_w(b) := \max \left[ \begin{array}{l} \frac{1.6 \cdot b}{2 \cdot 90} \\ 0.02315 \end{array} \right] \quad \text{Steel}(b) := 40 \cdot t_p(b) + 2 \cdot \left[ \frac{20}{b} - 1 \right] \cdot t_w(b)$$

$$b := 0.2, 0.4 \dots 10.0$$



$$q := 8 \dots 14$$



$$\text{Steel} \left[ \frac{20}{10+1} \right] = 1.996 \quad \text{Steel} \left[ \frac{20}{11+1} \right] = 1.915 \quad \text{Steel} \left[ \frac{20}{12+1} \right] = 1.93$$

$$t_p \left[ \frac{20}{11+1} \right] = 0.035 \quad t_w \left[ \frac{20}{11+1} \right] = 0.023$$

11 vägare, optimalt!

Anmärkning:

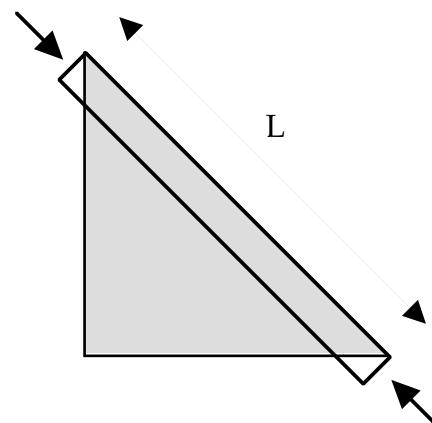
Man kan tänka sig att ytterligare kontrollera andra kriterier, t ex buckling vi ett skott med kombinerat skjuv- och axiell buckling, von Mises jämförelsespänning eller annat, men troligen hamnar vi på ungefär samma optimum.

B4.2:

Låt oss approximera en vanlig triangulär tryckbelastad bricka som en "stötta".

Enligt 12.1.1 i SSD erhåller vi då följande kritiska elastiska bucklingsspänning för fritt upplagda ändar:

$$\sigma_{acr} := \frac{\pi^2 \cdot D}{L^2 \cdot t} \quad \sigma_{acr} := 0.90 \cdot E \cdot \left[ \frac{t}{L} \right]^2$$



Med förhållandet  $t/L = 1/40$  får vi med denna approximation en kritisk bucklingsspänning på 118MPa, dvs ca halva sträckgränsen för att vanligt fartygsstål.

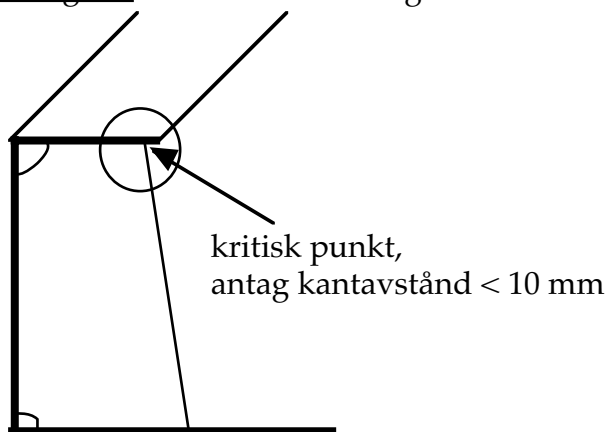
Om vi istället antog ett knäckfall med fast inspända ändar blir kritisk spänning 4 ggr högre (Euler 4:an), vilket korrigerat för plasticering motsvarar en kantspänning på 209 MPa

I verkligheten har nog en bricka en bucklingsspänning någonstans närmare det högre av dessa värden. Den tillåts kanske också vara belastad med en största "nominell" kantspänning på ca 180 MPa (?)

## Utmattning; Uppgifter

### B5.1

Den kontinuerliga lucksidokarmen på ett containerfartyg är stagad med brickor som sammanbinder däck och karmen enligt figuren här nedan. Du ska försöka göra en uppskattning av medellivslängden fram till utmattningsskada för denna förbandstyp.



a)

Bestäm max våginducerad spänningsvidd på  $10^{-8}$ -nivån från skrovbalkens vertikala böjning om vi antar att DNVs minimikrav för skrovbalkens böjmotstånd precis är uppfylla i luckkarmens överkant.

Utgå från att fartyget har  $C_B = 0.7$  samt att stålet är NV-24.

b)

Välj lämplig svetsklass för förbandet, använd SN-kurvan för medellivslängden (inte "designkurvan") samt anta att våginducerade längskeppsböjspänningar är Weibullfördelade med formfaktorn  $h=1.1$

Beräkna med direkt manuell summation, genom att dela in spänningsområdet i ett begränsat antal delintervall från utmattningegränsen och uppåt till maxnivån enligt a), delskadesumman för 20 års drift (dvs  $10^8$  vågmöten).

Ungefär hur lång blir medellivslängden ?

c)

Antag samma förutsättningar som i B5.2 ovan, utgå från en maximal spänningsvidd på 205 MPa vid  $10^{-8}$ -nivån. Beräkna i direkt sluten form (utan hänsyn till utmattningsgänsen) enligt FA5.2.5 delskadesumman vid 20 års drift enligt medelvärdeskurvan och enligt "design"-kurvan (två standardavvikelser från medelvärdeskurvan).

d)

Studera relativa inflytandet på delskadan av följande tänkbara varianter

- i) man använder ett höghållfast NV-36 stål istället vid oförändrad spänningsnivå
- ii) man använder ett höghållfast NV-36 stål istället och utnyttjar det för att höja spänningsnivån så mycket som klassen tillåter
- iii) man ökar kantavståndet till 50 mm på brickan

## Utmattning; Förslag till lösningar

B5.1 a)

Enligt DNVs klassregler är kravet på långskeppsstyrkan formulerat som:

$$z \geq \left| \frac{M_S + M_W}{\sigma} \right| \quad \sigma := 175 \cdot f_1$$

dvs för vanligt fartygsstål tillåts maximalt 175 MPa i kombinerat lugnvattenmoment och maximalt vågböjmoment (på  $10^{-8}$ -nivån). Observera dock att till denna spänningsnivå kommer eventuella lokala spänningar i konstruktionselementen.

Designmoment enligt DNV ger följande max spänningsvidd från vågböjmomentet:

$$M_S \geq M_{S0} \quad M_{S0} := -0.065 \cdot C_W \cdot L^2 \cdot B \cdot (C_B + 0.7) \quad \text{sagging}$$

$$M_{S0} := C_W \cdot L^2 \cdot B \cdot (0.1225 - 0.015 \cdot C_B) \quad \text{hogging}$$

$$M_W := M_{W0}$$

$$M_{W0} := -0.11 \cdot C_W \cdot L^2 \cdot B \cdot (C_B + 0.7) \quad \text{sagging}$$

$$M_{W0} := 0.19 \cdot C_W \cdot L^2 \cdot B \cdot C_B \quad \text{hogging}$$

$$C_B := 0.7 \quad \Delta M_{\text{tot}}(\text{dubbelamplitud}) := 0.49 \cdot C_W \cdot L^2 \cdot B$$

$$\text{varav} \quad \Delta M_W(\text{dynamiskt}) := 0.287 \cdot C_W \cdot L^2 \cdot B$$

$$\text{dvs} \quad \Delta \sigma_{\text{dyn}} := \frac{0.287}{0.49} \cdot 2 \cdot 175 \cdot f_1 \quad \text{MPa}$$

$$\Delta \sigma_{\text{dyn}} := 205 \cdot f_1 \quad \text{MPa}$$

b)

Svetsförbandet kan typiskt klassificeras som TYPE 4.2 eller TYPE 6.1(b) enligt SSD s97,99 vilket innebär en utmattningsstyrka enligt klass G (ganska usel!).

SN-kurvan definieras som

$$\log(N) := \log(a) - m \log(S)$$

där N är antalet cykler till makrospricka (brott i provbiten) och S är spänningsvidden i MPa a och m är konstanter, varierande för de olika kurvorna.

Enligt FA 5.2.3 erhåller vi för svetsklass G och medelkurvan,  $\log a = 11.7525$ ,  $m = 3$ , och utmattningsgränsen  $S_0 = 11$  MPa. Dessa data representerar alltså utmattningsstyrkan i förbandet.

## B5.1 b) forts

Belastningen på förbandet består av långtidsvariationerna från våginducerade böjmomentet. Liksom de flesta (linjära) våginducerade långtidsfördelningar kan spänningarna oftast väl beskrivas av en Weibull-fördelning.

Sannolikheten för överskridande av en viss spänningsvariation (dubbelamplitud) beskrivs som  $Q = 1 - F$  där  $F$  är fördelningsfunktionen. Av en stor mängd cykler  $n_{\text{tot}}$  motsvaras antalet cykler  $n_i$  över en viss nivå  $S_i$  av  $Q_i = n_i / n_{\text{tot}}$ .

$$\frac{n_i}{n_{\text{tot}}} := Q_i \quad Q_i := e^{-\left[\frac{S_i}{B}\right]^h}$$

Den spänningsvidd som överskrids med sannolikheten  $10^{-8}$  motsvarar den mest sannolikt största under  $10^8$  vågmöten, dvs för  $Q = 10^{-8}$  har vi  $S = 205$  MPa.

Formparametern  $h$  i fördelningen var given till 1.1. Med dessa kända data kan vi lösa ut konstanten  $B$  i fördelningen:

$$10^{-8} := e^{-\left[\frac{205}{B}\right]^{1.1}} \quad B := \frac{205}{\left(-\ln(10^{-8})\right)^{\frac{1}{1.1}}} \quad B := 14.50$$

För att genomföra delskadesummationen delar vi in spänningsfördelningen i ett antal delintervall och beräknar kvoten mellan antal spänningscykler  $\Delta n_i$  i intervallet och antal cykler till brott  $N_i$  för ett representativt värde av spänningen i intervallet. För att inte behöva göra en alltför tät indelning i spänningsintervall tar jag intervallets logaritmiska medelvärde för beräkning av  $N_i$ .

En direkt summation ger oss möjlighet att ta hänsyn även till utmattningsgränsen. Jag delar in först in spänningarna i fem jämna intervall från utmattningsgränsen 11 MPa upp till maxspänningen 205 MPa. (Detta är mycket glest, men vi kan senare kolla om det räckte)

Uträkningarna är gjorda i MathCad enligt följande sida:

$$n(S) := 10^8 \cdot e^{-\left[\frac{S}{14.5}\right]^{1.1}} \quad N(S) := \frac{10^{11.7525}}{S^3}$$

$$i := 0, 1..5 \quad j := 0, 1..4$$

$$S_i := \left[ 11 + \frac{(205 - 11) \cdot i}{5} \right] \quad nS := n(S) \quad \Delta nS_j := nS_j - nS_{j+1}$$

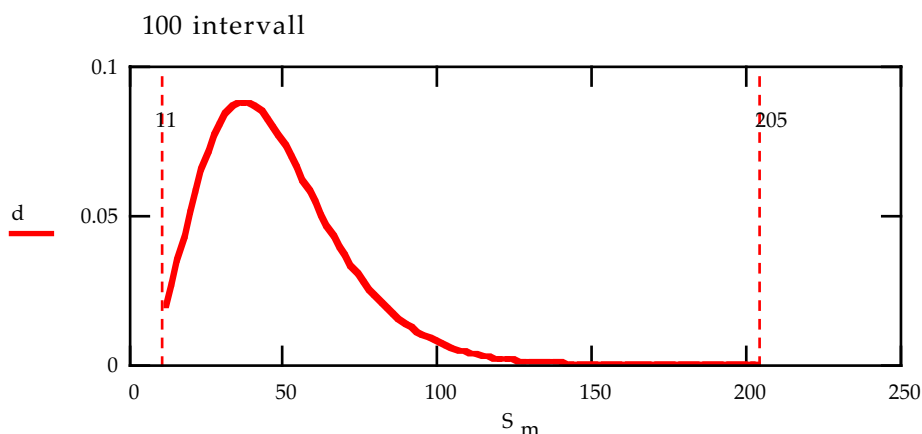
$$S_{m_j} := \left[ 10^{\frac{(\log(S_j) + \log(S_{j+1})))}{2}} \right] \quad NS_m := N(S_m) \quad d_j := \frac{\Delta nS_j}{NS_{m_j}}$$

$$S = \begin{bmatrix} 11 \\ 49.8 \\ 88.6 \\ 127.4 \\ 166.2 \\ 205 \end{bmatrix} \quad nS = \begin{bmatrix} 4.781 \cdot 10^7 \\ 2.054 \cdot 10^6 \\ 6.604 \cdot 10^4 \\ 1.811 \cdot 10^3 \\ 44.369 \\ 0.995 \end{bmatrix} \quad \Delta nS = \begin{bmatrix} 4.576 \cdot 10^7 \\ 1.988 \cdot 10^6 \\ 6.423 \cdot 10^4 \\ 1.767 \cdot 10^3 \\ 43.374 \end{bmatrix} \quad S_m = \begin{bmatrix} 23.405 \\ 66.425 \\ 106.243 \\ 145.512 \\ 184.583 \end{bmatrix} \quad NS_m = \begin{bmatrix} 4.411 \cdot 10^7 \\ 1.93 \cdot 10^6 \\ 4.716 \cdot 10^5 \\ 1.836 \cdot 10^5 \\ 8.993 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 1.037 \\ 1.03 \\ 0.136 \\ 9.625 \cdot 10^{-3} \\ 4.823 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \quad D := \sum d \quad D = 2.214$$

Delskadesumman  $D = 2.21$  innebär alltså en medellivslängd av ca  $20/2.21 = 9$  år om 20 år motsvarar  $10^8$  cykler. Om vi gör motsvarande beräkning med 20 intervall istället erhåller vi  $D = 2.289$  och med 100 intervall 2.295 dvs precisionen blev fullgod trots endast 5 intervall ! (Om man istället för att använda logaritmiska medelvärdet tar aritmetiska medelvärdet blir konvergensen mycket sämre; med fem intervall erhålls  $D = 3.59$ , med 20 intervall  $D = 2.36$  och med 100 intervall  $D = 2.297$ )

Diagrammet här intill visar delskadans "frekvensfunktion" med avseende på spänningsnivåerna.



## B5.1 c)

Delskadesumman (kumulativa delskadan) i sluten form förutsätter att vi försummar utmattningsgränsen (vilket f.ö. flera konstruktionsregler faktiskt föreslår åtminstone i korrosiv miljö).

$$D(n_0, a, B, m, h) := \frac{n_0}{a} \cdot B^m \cdot 10^{0.2934 \cdot \left[ \frac{m}{h} - 1 \right]^{1.4107}}$$
$$D(10^8, 10^{11.7525}, 14.50, 3, 1.1) = 2.322$$

dvs praktiskt taget identiskt samma resultat som vid summeringen i uppgift b) ovan. delskadan under utmattningsgränsen är i detta fall nästan helt försumbar.

## B5.1 d)

i)

Stålets sträckgräns ingår inte alls i dimensioneringsformlerna, man antar således att ett mera statiskt hållfast stål inte har bättre utmattningsstyrka än vanligt stål. Materialet som sådant har normalt även bättre utmattningsegenskaper, men pga inflytande från svetsar och svetsegenspänningar vågar man inte ta någon intäkt i detta.

ii)

eftersom  $D$  är proportionell mot  $S^m$  medför en höjning av spänningsnivån (lokalt!) en kraftig sänkning av utmattningstidslängden. Med NV-36 stål tillåts vi i princip höja spänningsnivån en faktor  $f_1 = 1.39$ . Delskadesumman ökar då med faktorn  $1.39^3 = 2.686$  !!

iii)

En förflyttning av svetsen bort från fria kanten medför lägre utmattningsskada / en bättre svetsklass. I detta exempel närmast klass F

$$D(10^8, 10^{12.2370}, 14.50, 3, 1.1) = 0.761 \quad (\text{medelv})$$

$$D(10^8, 10^{11.8}, 14.50, 3, 1.1) = 2.082 \quad (\text{medelv} - 2 \text{ s})$$

Det senare värdet är alltså det som enligt normerna skulle användas för designändamål. Fortfarande för dåligt.

Om vi använder DNVs designdiagram FA5.2.6 så kan vi se att för en 20-års max spänningsamplitud på  $205/2 = 102.5$  MPa och en formfaktor  $h = 1.1$  i Weibullfördelningen borde man inte tillåta en sämre svetsklass än D. (Detta motsvarar en god stumsvets i plåtskarvarna!)

Är däremot formfaktorn  $h = 0.8$  kan man acceptera svetsklass G !!

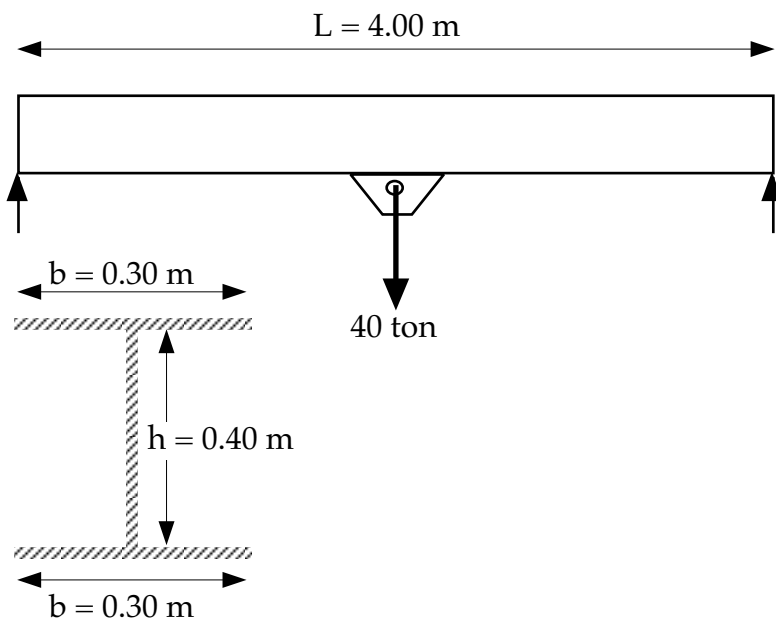
*... och detta är i ett nötskal vad problemet med utmattningsdimensionering egentligen är;  
- att kunna bestämma en relevant långtidsfördelning ...*



## Probabilistiska metoder; Uppgifter

B6.1

På ett varv vill man tillverka en tillfällig lyftanordning bestående av en I-balk med ett fästöra. Balken ska kunna bära 40 ton (statisk last). Man har en 12 mm plåt som man vill utnyttja för detta ändamål. Ingenjören har beräknat att om man vill undvika bucklingsförstyvningar på livplåten blir optimalt tvärsnitt sammansatt av en livplåt på 0.4 m höjd och flänsar med 0.3 m bredd. Enligt hans beräkningar blir då max böjspänning 219 MPa ( $\tau = 50$  MPa) och max nedböjning 6.74 mm.

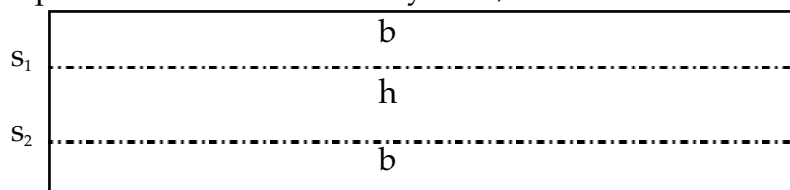


Han lämnar skissen nedan till verkstaden som sätter igång och skär ut balkdelarna ur en 1.00 m bred plåt. Eftersom detta är en tillfällig konstruktion lägger de inte någon större möda på plåtskärningen utan man kan räkna med att man har en osäkerhet på skärsnittets placering räknat från plåtkanten motsvarande en standardavvikelse på ca 2 cm. Vidare förbrukas 4 mm av plåten i varje snitt. Ingen föreställer sig att detta kan ha någon betydelse för balkens funktion. Du skall nu försöka uppskatta om det är så !

a)

Beräkna med FORM risken att nedböjningen i den färdiga konstruktionen kommer att bli 20% större än beräknat (detta motsvarar ca 10% högre spänningar, men räkna på nedböjningen). Du får anta att alla ingående storheter utom skärsnittets placering är deterministiska. Linearisera Din gränssyta i medelvärdespunkten enligt sista uttrycket på FA.6.2.4.

OBS att placeringen av plåtstrimlorna har viss betydelse, räkna med att de skärs ut enligt fig:



(Kommentera gärna om risken ökar eller minskar om strimlorna skärs ut i följden h,b,b räknat från en sida)

b)

Rita upp gränskurvan i utfallsytan  $s_1, s_2$  och beräkna säkerhetsindex  $\beta_{HL}$  (grafiskt, numeriskt eller analytiskt).  $s_1, s_2$  representerar här skärsnittets placering runt bör/medelvärdet 0.

c)

Genomför en MonteCarlo simulering med minst 10000 utfallspår och beräkna risken direkt ur resultatet.

## Probabilistiska metoder; Förslag till lösningar

B6.1 a)

De stokastiska primära variablerna är definierade som avvikelsen från den nominella positionen på de båda skärsnitten  $s_1$  och  $s_2$ .

Motsvarande stokastiska (sekundära) variabler blir då livhöjden  $h$ , och flänsbredderna  $b_1$  och  $b_2$ , flänsarnas avstånd till neutralaxeln  $e_1$  och  $e_2$  samt sektionströghetsmomentet  $I$  (som är omvänt proportionell mot utböjningen).

$$h(s_1, s_2) := 0.4 - 0.004 - s_1 + s_2$$

$$b_1(s_1) := 0.3 - 0.002 + s_1$$

$$b_2(s_2) := 0.3 - 0.002 - s_2$$

$$e_1(s_1, s_2) := \frac{b_2(s_2) \cdot t \cdot (h(s_1, s_2) + t) + h(s_1, s_2) \cdot t \cdot \left[ \frac{h(s_1, s_2)}{2} + \frac{t}{2} \right]}{(b_1(s_1) + b_2(s_2) + h(s_1, s_2)) \cdot t}$$

$$e_2(s_1, s_2) := h(s_1, s_2) + t - e_1(s_1, s_2)$$

$$I(s_1, s_2) := \frac{b_1(s_1) \cdot t^3 + t \cdot h(s_1, s_2)^3 + b_2(s_2) \cdot t^3}{12} + b_1(s_1) \cdot t \cdot e_1(s_1, s_2)^2 \dots$$

$$+ h(s_1, s_2) \cdot t \cdot \left[ \frac{h(s_1, s_2)}{2} + \frac{t}{2} - e_2(s_1, s_2) \right]^2 + b_2(s_2) \cdot t \cdot e_2(s_1, s_2)^2$$

$$I_{\text{nom}} := 3.696 \cdot 10^{-4}$$

$$I_{\text{mean}} := I(0, 0) \quad I_{\text{mean}} = 3.598 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{I_{\text{mean}}}{I_{\text{nom}}} = 0.974$$

Redan materialförlusten vid skärningen medför alltså ett minskat tröghetsmoment med 2.6% jämfört med det "nominella".

Marginalfunktionen (nedböjningen får inte bli mer än 20% över nominella) kan vi formulera som:

$$g(s_1, s_2) := I(s_1, s_2) - \frac{1}{1.2} \cdot I_{\text{nom}}$$

B6.1 a) forts:

Lösning med FORM och linearisering i medelvärdespunkten ger:

$$s_1 := 0 \quad s_2 := 0$$

$$\beta_{FO} := \frac{g(s_1, s_2)}{\sqrt{\left[\left[\frac{d}{ds_1} g(s_1, s_2)\right] \cdot 0.02\right]^2 + \left[\left[\frac{d}{ds_2} g(s_1, s_2)\right] \cdot 0.02\right]^2}}$$

$$\beta_{FO} = 1.281$$

$$P_f := 1 - \text{cnorm}(\beta_{FO}) \quad P_f = 0.1$$

Risken för för stor nedböjning blir här alltså 10%.

b)

En grafisk lösning av problemet kan vi erhålla genom att transformera de primära variablerna  $s_1, s_2$  till standardiserade normalfördelade variabler  $z_1, z_2$ . Därefter rita in marginalfunktionens värde i utfallsrummet  $z_1/z_2$  och sedan mäta kortaste avståndet från medelvärdet till gränslinjen  $g=0$ . Detta avstånd är säkerhetsindex  $\beta_{HL}$ .

Den grafiska lösningen på nästa sida ger  $\beta_{HL}$  knappt 1.3 dvs ungefär samma resultat som ovan med FORM. Vi ser också att marginalfunktionen  $g$  är i det närmaste linjär inom det betraktade utfallsrummet.

C6.2 forts  
GRAFISK LÖSNING:

$$z_1(s_1) := \frac{s_1}{0.02} \quad z_2(s_2) := \frac{s_2}{0.02}$$

$$i := 0..100 \quad j := 0..100 \quad z_{1,i,j} := -2 + 0.04 \cdot i \quad z_{2,i,j} := -2 + 0.04 \cdot j$$

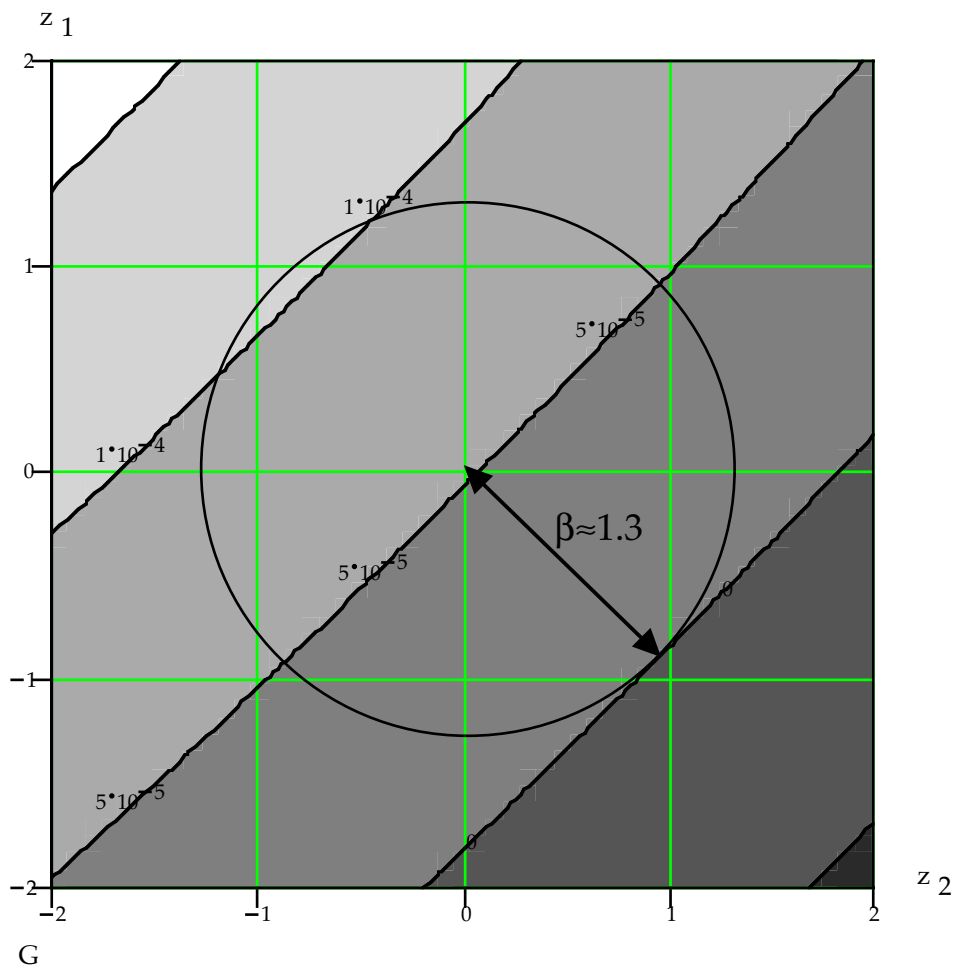
$$z_{1low} := -2 \quad z_{1high} := 2 \quad z_{1n} := 50$$

$$z_{2low} := -2 \quad z_{2high} := 2 \quad z_{2n} := 50$$

$$i := 0..z_{1n} - 1 \quad z_{1ind_i} := z_{1low} + i \cdot \frac{z_{1high} - z_{1low}}{z_{1n} - 1}$$

$$j := 0..z_{2n} - 1 \quad z_{2ind_j} := z_{2low} + j \cdot \frac{z_{2high} - z_{2low}}{z_{2n} - 1}$$

$$G_{i,j} := g\left[\left(0.02 \cdot z_{1ind_i}\right), \left(0.02 \cdot z_{2ind_j}\right)\right]$$



B6.1 c)

MONTE CARLO-SIMULERING:

$i_{\max} := 10000$

$i := 1, 2, \dots, i_{\max}$        $x_{1_i} := \text{rnd}(1)$      $x_{2_i} := \text{rnd}(1)$     (jämt fördelade stokastiska variabler)

$$s_{1_i} := \left[ \left( -2 \cdot \ln(x_{1_i}) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x_{2_i}) \right] \cdot 0.02 \quad s_{2_i} := \left[ \left( -2 \cdot \ln(x_{2_i}) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x_{1_i}) \right] \cdot 0.02$$

(normalfördelade primära variabler: medel = 0, standardavvikelse = 0.02)

$$g_{\text{sim}_i} := g(s_{1_i}, s_{2_i}) \quad (\text{marginalfunktionens utfall})$$

$$j_{\min} := -1 \cdot 10^{-4} \quad j_{\max} := 2 \cdot 10^{-4} \quad n_j := 150$$

$$\Delta_j := \frac{j_{\max} - j_{\min}}{n_j} \quad j := 0 \dots n_j + 1 \quad \text{interval}_j := j_{\min} + j \cdot \Delta_j$$

$$f := \frac{\text{hist}(\text{interval}, g_{\text{sim}})}{i_{\max} \cdot \Delta_j} \quad (\text{frekvensfördelningen i histogramform})$$

$j := 0 \dots n_j$     (antal intervall)

$$P_f := \sum_j \text{if}(\text{interval}_j < 0, \Delta_j \cdot f_j, 0) \quad P_f = 0.082 \quad (\text{"risken" enligt simuleringens utfall})$$

$$\mu_{\text{mx}} := \text{mean}(g_{\text{sim}}) \quad \mu_{\text{mx}} = 5.199 \cdot 10^{-5} \quad (\text{medelvärde och standardavvikelse enligt simuleringens utfall})$$

$$\sigma_{\text{mx}} := \text{stdev}(g_{\text{sim}}) \quad \sigma_{\text{mx}} = 3.975 \cdot 10^{-5}$$

$$P_f := \text{pnorm}(0, \mu_{\text{mx}}, \sigma_{\text{mx}}) \quad P_f = 0.095 \quad (\text{risken utvärderad från en antagen normalfördelning})$$

Observera att exemplet ovan bara är ett utfall av oändligt många tänkbara.

Utfallen återges i diagram på nästa sida. Lite intressant är här den "ansamling" av utfall som ligger kring medelvärdet och kring ca en standardavvikelse åt vardera hållet.

C6.1 b2) forts

marginalfunktionens utfall:

